UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE Aix-Marseille II
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE

Spécialité : Mathématiques discrètes et fondements de l'informatique

par

Daniel DE CARVALHO

Titre :

Sémantiques de la logique linéaire et temps de calcul

soutenue publiquement le 4 septembre 2007

JURY

M. Patrick BAILLOT
M. Pierre-Louis CURIEN
M. Thomas EHRHARD
M. Martin HYLAND *Rapporteur*
M. François LAMARCHE
M. Kazushige TERUI
M. Lorenzo TORTORA DE FALCO *Rapporteur*

Table des matières

Remerciements

Tout d’abord, merci à Patrick Baillot pour m’avoir initié à la recherche en acceptant de diriger mon stage de DEA sur la logique linéaire légère et la théorie des ensembles naïve, puis pour avoir continué tout au long de ma thèse à me prodiguer des conseils et d’avoir eu la patience de lire des versions préliminaires de mes travaux. J’ai tiré un grand profit des très nombreuses discussions que j’ai eues avec lui.

Merci à Thomas Ehrhard pour sa générosité dans la transmission de sa compréhension de la logique. Il a su diriger ma thèse en me laissant une grande liberté, tout en restant très exigeant.

Merci à Damiano Mazza et à Lionel Vaux pour leur amitié et pour notre collaboration : grâce à eux, j’ai mieux compris les réseaux de la logique linéaire et les réseaux différentiels.

Merci aux membres de l’équipe de logique de l’IML pour leur accueil, en particulier à Pierre Boudes, Marie-Renée Donnadieu, Yves Lafont, Myriam Quatrini, Laurent Régnier et Paul Ruet.

Merci aussi à Etienne Duchesne, Marc de Falco, Yves Guiraud et Pierre Hyvernat pour avoir contribué à créer une ambiance favorable au sein de l’équipe.

Merci à Julien Bernat, Axel Ferrari, Marion Le Gonidec, Thierry Monteil et Mathieu Sablik pour avoir fait de même au sein de l’IML.

Merci à Alina Nicolae pour avoir partagé avec moi un mois d’août studieux.

Merci à Chantal Berline, Pierre Boudes, Paolo di Giamberardino, Martin Hyland, Olivier Laurent, Paul-André Melliès, Alexandre Miquel, Virgile Mogbil, Michele Pagani, Gabriele Pulcini, Laurent Régnier, Paul Ruet, Simona Ronchi della Rocca, Kazushige Terui et Lorenzo Tortora de Falco pour toutes les discussions que j’ai eues avec eux et qui ont pu m’éclairer sur tel ou tel point.

Merci à Aurélia Lozingot et à Jacqueline Giraud pour avoir facilité les démarches administratives, qui seraient vite devenues pesantes sans elles.

Merci à Martin Hyland et à Lorenzo Tortora de Falco d’avoir accepté d’être les rapporteurs de ma thèse. Merci à Pierre-Louis Curien, François Lamarche et Kazushige Terui d’avoir accepté de faire partie du jury.

Merci à dd, jj et jl pour le reste.

Introduction

Qu'est-ce qu'une preuve ? C'est une sorte d'assurance que ce l'on énonce est vrai. Comme toujours en mathématiques, à partir d'une notion intuitive, on veut donner une définition idéale, sinon objective, du moins intersubjective. Plusieurs réponses ont été données au cours du siècle dernier : c'est une suite de symboles (Hilbert), c'est un arbre (Gentzen), c'est une sorte de graphe, un réseau (Girard). Elles ont toutes en commun d'être des objets finis : les preuves sont des objets finis et elles servent à établir des propriétés sur des objets infinis. C'est cela notre assurance, cette réduction de l'infini au fini : on peut toujours s'assurer qu'un objet fini se conforme bien à ce qu'il doit être.

On attend bien sûr de ces objets finis qu'ils formalisent l'application des règles de déduction que nous, êtres humains, avons l'habitude d'utiliser pour raisonner. En particulier, ils devraient formaliser l'application du *modus ponens* : si on a déduit A et $A \Rightarrow B$ (A implique B), alors on peut déduire B. C'est bien le moins. Autrement dit, une logique digne de ce nom devrait valider cette règle. Certes. Mais la théorie de la démonstration a une autre exigence, bien plus surprenante : une logique digne de ce nom, c'est une logique qui permet de prouver sans cette règle ce qu'on peut prouver avec cette règle !

Précisément, l'énoncé du théorème de Gentzen dit que le calcul des séquents a cette propriété. Une première lecture de ce théorème dit que si B est prouvable, alors on n'a pas eu besoin d'utiliser le *modus ponens*. Une application de ce théorème pourrait être ainsi de prouver que certaines formules ne sont pas prouvables. Les logiciens de la première moitié du XXème siècle avaient en effet comme objectif de s'assurer que les raisonnements et les axiomes sur lesquels on s'appuyait ne conduiraient jamais à une contradiction (prouver une formule et sa négation). Cet objectif a été réalisé... pour le calcul des prédicats. Grâce à Gödel, on sait que, pour l'essentiel, on ne pourra jamais faire mieux.

Mais il y a une seconde lecture de ce théorème, autrement plus féconde. En réalité, pour cette seconde lecture, l'énoncé du théorème ne suffit pas, il faut regarder la preuve du théorème (ici, pour une fois, "preuve", c'est au sens ordinaire, pas au sens de l'objet mathématique) : cette preuve est constructive, c'est-à-dire qu'elle fournit une procédure qui calcule une preuve qui n'utilise pas la règle du *modus ponens* à partir d'une preuve qui utilise la règle du *modus ponens*. Ainsi, étant données deux preuves prouvant l'une A et l'autre $A \Rightarrow B$, si l'on fait une coupure entre ces deux preuves (on applique la règle du *modus ponens*), alors on peut éliminer la coupure (obtenir une nouvelle preuve qui n'utilise pas la règle du *modus ponens*). Les preuves ne sont plus seulement des objets finis statiques, ce sont des objets qui interagissent.

Ce théorème est à l'origine d'une nouvelle réponse à notre question : une preuve, c'est un programme ou l'argument d'un programme (correspondance de Curry-Howard) : le programme correspondant à la preuve sans coupure fournie par la procédure qui élimine les coupures est le résultat du programme correspondant à la preuve de $A \Rightarrow B$ appliqué à l'argument correspondant à la preuve de A. Plus généralement, c'est un calcul. Voilà ce qui motive l'étude de la dynamique de l'interaction entre les preuves.

La *sémantique dénotationnelle* est l'étude des invariants de cette dynamique. Dans la syntaxe,

nous avions des objets finis qui interagissent de manière très compliquée (un calcul, ça peut être long, très long...). Dans la sémantique, les preuves ne sont plus des objets finis, ce sont des fonctions linéaires, des fonctions analytiques, etc..., mais, en échange, le temps n'existe plus, l'élimination des coupures, c'est juste la composition de fonctions ! Ce qu'on entend ici par fonction, c'est quelque chose de très général, c'est exactement ce que dans la théorie des catégories, on appelle "flèche" ou "morphisme". Un énoncé, c'est un objet dans une catégorie, une preuve, c'est une flèche dans cette catégorie et une coupure, c'est la composition de flèches. L'interprétation des preuves doit alors être invariante au cours de l'élimination des coupures.

La sémantique dénotationnelle de la logique intutionniste dans une certaine catégorie a donné naissance à la logique linéaire découverte par Girard dans les années 80. La logique linéaire est un raffinement de la logique classique, en ce sens que les énoncés contiennent plus d'informations que leurs traductions en logique classique. En particulier, ces informations portent sur les ressources utilisées pour démontrer les énoncés. C'est pourquoi des variantes de la logique linéaire permettant de caractériser certaines classes de complexité ont pu apparaître dans les années 90 et au début du siècle : logique linéaire élémentaire et logique linéaire légère par Girard, logique linéaire douce par Lafont...

La logique linéaire est ainsi née avec une certaine sémantique (la sémantique cohérente ensembliste). De manière très générale, on peut se demander quelle structure catégorique fournit une sémantique dénotationnelle de la logique linéaire. Après les premières réponses de Lafont et Seely est apparue une réponse donnée par Benton, Bierman, de Paiva et Hyland (BBPH). A notre connaissance, toutes les sémantiques de la logique linéaire apparues jusqu'à présent rentraient effectivement dans le cadre qu'ils avaient donné. Or, dans notre thèse, dont le travail porte sur les exponentielles de la logique linéaire, nous présentons une nouvelle sémantique dénotationnelle ne rentrant pas dans ce cadre. Cette sémantique est même la plus simple de toutes les sémantiques connues. On y reviendra. D'un point de vue historique, cependant, les choses doivent être présentées différemment. Nous avions un candidat sérieux à être un modèle de la logique linéaire, et même, nous conjecturions que nous avions une construction très générale de modèle de la logique linéaire dont ce modèle n'était qu'un cas particulier, mais puisque BBPH ne confirmait pas que tel était bien le cas, nous avons étudié à nouveau ce problème : qu'est-ce qu'un modèle catégorique de la logique linéaire ?

Notre réponse est donnée dans le Chapitre 3. Notre étude prend l'élimination des coupures de la logique linéaire au sérieux, au sens où :

1°) nous ne quotientons pas les preuves par η ;

2°) nous considérons toutes les preuves, et pas seulement les preuves η-expansées.

L'option prise par BBPH fut de quotienter les preuves par η. Elle coïncide avec des notions connues de théorie des catégories. Il semble qu'il en va de même de l'option alternative qui consiste à ne considérer que les preuves η-expansées. Curieusement, tel n'est pas le cas de l'option intermédiaire (ni quotient ni restriction) : le lecteur verra que nous avons été amenés à introduire des notions nouvelles en théorie des catégories.

La construction très générale dont nous avons parlé provient de la traduction de la logique linéaire dans les réseaux différentiels proposée par Ehrhard. Les réseaux différentiels, introduits par Ehrhard et Régnier, proviennent eux-mêmes de la considération des espaces de finitude, un modèle de la logique linéaire qui identifie les connecteurs additifs & et $\oplus$, ainsi que leurs unités respectives ! Certes, ça n'a aucun sens d'un point de vue logique (dans la syntaxe), mais dans la sémantique, ça marche et c'est même très intéressant. Il faut bien comprendre en effet que la prouvabilité des formules ne nous intéresse plus, nous sommes descendus d'un niveau : nous sommes au deuxième sous-sol, comme dirait Girard. C'est tellement vrai que les réseaux différentiels sont une syntaxe qui permet de prouver n'importe quoi. L'important, c'est que l'on peut calculer.

Cette traduction respecte-t-elle l'élimination des coupures ? Obtient-on des modèles de la logique linéaire ? La réponse est donnée dans les chapitres 5 et 7 : cela dépend. D'abord, cette traduction suppose qu'on a plus que les réseaux différentiels : l'interaction des réseaux différentiels est essentiellement finitaire, ce qui n'est pas le cas de celle des réseaux de la logique linéaire ; on suppose donc que l'on peut faire des sommes infinies de réseaux différentiels (à coefficients réels positifs). Une fois cette hypothèse faite, on peut effectivement traduire les réseaux de la logique linéaire. Pour autant, on n'obtient pas nécessairement des modèles de la logique linéaire. En effet, le point de départ de notre travail provient de la remarque que dans les réseaux différentiels, on n'a besoin ni de supposer la cocommutativité de la contraction (c'est bien celle de la logique linéaire) ni la commutativité de la cocontraction (ça, par contre, ça n'existait pas dans la logique linéaire). Notre réponse est alors la suivante :

1°) si la contraction est cocommutative, alors on obtient un modèle de la logique linéaire ;

2°) si la cocontraction n'est pas commutative, alors on n'obtient jamais un modèle de la logique linéaire au sens de BBPH ;

3°) si la contraction n'est pas cocommutative, alors il existe des interprétations de la logique linéaire qui ne sont pas des modèles, même en présence d'une cocontraction commutative.

Notre modèle favori de la logique linéaire (celui qui ne rentrait pas dans le cadre de BBPH) est un exemple d'un modèle construit à partir d'un modèle des réseaux différentiels dont la contraction est commutative et dont la cocontraction n'est pas commutative. Il interprète le fragment sans exponentielle de la logique linéaire (le fragmet finitaire) de la même manière que le modèle relationnel des multiensembles finis : par la catégorie *-autonome des ensembles et relations. Mais au lieu d'interpréter la formule $!A$ par l'ensemble des multiensembles finis à valeurs dans l'interprétation de A, on fait encore plus simple, on l'interprète par l'ensemble des suites finies à valeurs dans A. Ce modèle est présenté dans le Chapitre 6.

Le modèle dual de ce modèle des réseaux différentiels a une contraction non cocommutative et une cocontraction non commutative : il fournit le contre-exemple permettant de donner la troisième partie de notre réponse. Voir le Chapitre 7.

Bien que le modèle relationnel des multiensembles finis de la logique linéaire fût bien connu depuis longtemps, l'interprétation du lambda-calcul qu'on pouvait faire dans certaines lambda-algèbres dans la catégorie cartésienne fermée issue de ce modèle ne l'était pas. Curieusement, nous avons alors remarqué que ce modèle coïncidait avec un modèle considéré il y a plus de vingt-cinq ans par Coppo, Dezani et Venneri. Eux partaient d'un système de types avec intersection pour obtenir un modèle ; nous, nous partons d'un modèle pour obtenir un système de types avec intersection. En fait, ce que les spécialistes des types avec intersection appellent "modèle" est souvent quelque peu différent que ce que nous avons vu jusqu'à présent : ils considèrent des systèmes de types tels que deux termes β-équivalents sont typables avec les mêmes jugements de types, puis interprètent les termes par l'ensemble de leur types. On voit donc deux différences entre les modèles ainsi obtenus et ceux de la sémantique dénotationnelle :

1°) en sémantique dénotationnelle, il y a un cadre catégorique ;

2°) en sémantique dénotationnelle, la sémantique existe indépendamment de la syntaxe.

Les modèles n'ayant pas ces propriétés ne sont certes pas dépourvus d'intérêts, mais nul doute qu'on doit leur préférer ceux qui ont ces propriétés. Ou, plus exactement, nul doute que l'on aimerait arriver à pouvoir considérer les modèles obtenus en passant par la syntaxe dans un cadre catégorique indépendant de la syntaxe. C'est précisément ce que nous avons fait pour le modèle de Coppo-Dezani-Venneri.

En réalité, il y a quelques petites différences entre les deux systèmes de types et la présentation de notre modèle est quelque plus agréable ; ceci nous a permis de corriger un de leurs théorèmes.

Ceci étant dit, nous avons nous aussi produit un tel modèle "défectueux" dans le Chapitre 9. Ce chapitre étudie les termes légers affines de Terui, que l'on peut voir comme une notation des réseaux intuitionnistes non typés de la logique affine légère, à l'aide de systèmes de types avec intersection. Le but était de caractériser les termes sans erreur afin de pouvoir tirer profit effectivement de la plus grande expressivité des termes non typés sur ceux des termes typés et d'étudier leurs traductions dans le lambda-calcul. On obtient ainsi un modèle, mais au sens où l'on a interprété les termes par un ensemble de types invariant par β-réduction.

Le Chapitre 8, lui, présente un travail qui consiste à obtenir des informations sur le temps d'exécution des lambda-termes à partir de leurs interprétations dans la sémantique du lambda-calcul issue du modèle relationnel multiensembliste de la logique et étudiée dans le Chapitre 6. On tire profit de ce que la sémantique d'un lambda-terme parle de son interaction avec les autres lambda-termes. Mais pas seulement : un point crucial de ce travail est que l'intersection du système de types correspondant à cette sémantique n'est pas idempotente. Le résultat est un lien très fort entre la taille des points dans la sémantique et le temps d'exécution des lambda-termes dans la machine de Krivine, une machine qui implante la réduction linéaire de tête. On a ainsi obtenu une définition sémantique du temps de calcul indépendante de tout système à complexite implicite.

Préliminaires

Chapitre 1

Préliminaires catégoriques

1.1 Catégories

Cette section a essentiellement pour but de fixer quelques notations, puisqu'il ne contient que du matériel standard, que l'on peut trouver dans [40], [39], [12] et [13], à l'exception de la définition des catégories $*$-autonomes.

Etant donnée une catégorie $\mathbb{C}$, pour tous objets A et B, on notera $\mathbb{C}[A, B]$ le "hom-set" des flèches de A vers B dans $\mathbb{C}$.

On fera l'hypothèse qu'il existe une catégorie **Ens** d'ensembles et de fonctions telle que tous les "hom-sets" des catégories que nous considérerons sont des objets de cette catégorie. En outre, on supposera que les "hom-sets" d'une même catégorie, et, plus généralement, d'un même graphe, sont deux à deux disjoints. Cela implique que, étant donnée une flèche, on sait à quel "hom-set" ellle appartient. Ainsi, si l'on écrit, par exemple, $\emptyset \in \mathbf{Rel}[A, B]$ et $\emptyset \in \mathbf{Rel}[A', B']$ et si l'on n'a pas $A = A'$ et $B = B'$, alors les deux $\emptyset$ ne sont pas identiques ; c'est que l'on commet l'abus de langage consistant à écrire $\emptyset \in \mathbf{Rel}[A, B]$ au lieu de $(\emptyset, A, B) \in \mathbf{Rel}[A, B]$.

Etant donnée une catégorie $\mathbb{C}$, sauf mention contraire, on notera $\circ_{\mathbb{C}}$ sa composition et $id_A^{\mathbb{C}}$ l'identité de l'objet A dans $\mathbb{C}$ (ou, respectivement, $\circ$ et id_A, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible).

On sait que, en général, la notion d'*isomorphisme entre catégories* est une notion trop forte pour pouvoir comparer deux catégories et que la notion *d'équivalence* est souvent plus appropriée. Une *équivalence adjointe* (*"adjoint equivalence"*) est une adjonction telle que l'unité et la coünité sont des isomorphismes naturels. On distingue alors deux notions d'équivalence :

- la notion *d'équivalence de catégories* : c'est un foncteur F tel qu'il existe un autre foncteur G et deux transformations naturelles α et β tels que (F, G, α, β) est une équivalence adjointe ;
- la notion *d'équivalence faible de catégories* : c'est un foncteur plein et fidèle tel que tout objet de la catégorie d'arrivée est isomorphe à un objet qui fait partie de l'image du foncteur.

La première est plus forte que la seconde, en ce sens que pour que la seconde implique la première, on a besoin de l'axiome du choix (dit en termes catégoriques : tout épi est "split")..

Beaucoup d'objets et de flèches sont définis en termes de propriétés universelles : on sait que, en général, ainsi, on ne les définit qu'à isomorphisme près. C'est souvent suffisant. On peut aussi vouloir choisir un de ces objets ; c'est pourquoi on peut alors vouloir les définir en termes de structure (comme on le fait, par exemple, pour les catégories monoïdales, qui n'ont pas de propriété universelle). Par exemple, une *structure cartésienne* est le choix d'un produit cartésien.

Définition 1.1.1. *Une* structure cartésienne *est un 7-uplet* $(\mathbb{C}, 1, !, \times, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *tel que*

- $\mathbb{C}$ *est une catégorie ;*

– 1 *est un objet de* $\mathbb{K}$ *;*
– $! = (!_A)_{A\in\mathbb{C}}$ *avec* $!_A$ *l'unique flèche de* A *vers* 1 *;*
– $\pi^1 = ({\pi^1}_{A_1,A_2})_{A_1,A_2\in\mathbb{C}}$ *et* $\pi^2 = ({\pi^2}_{A_1,A_2})_{A_1,A_2\in\mathbb{C}}$ *avec* ${\pi^j}_{A_1,A_2}$ *une flèche de* $A_1 \times A_2$ *vers* A_i *;*
– *si* f_1 *est une flèche de* C *vers* A_1 *et* f_2 *est une flèche de* C *vers* A_2*, alors* $\langle f_1, f_2\rangle$ *est une flèche de* C *vers* $A_1 \times A_2$ *telle que* ${\pi^j}_{A_1,A_2} \circ \langle f_1, f_2\rangle = f_j$ *;*
– *de plus, si* h *est une flèche de* C *vers* $A_1 \times A_2$*, alors* $\langle {\pi^1}_{A_1,A_2} \circ h, {\pi^2}_{A_1,A_2} \circ h\rangle = h$*.*

De même, dans une catégorie cartésienne fermée, il peut y avoir beaucoup de *structures cartésiennes fermées*, mais elles seront toutes isomorphes.

Définition 1.1.2. *Une* structure cartésienne fermée *est un 10-uplet* $(\mathbb{C}, 1, !, \times, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, \Rightarrow, \Lambda, ev)$ *tel que*
– $(\mathbb{C}, 1, !, \times, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est une structure cartésienne ;*
– *pour tous objets* A *et* B*,* $A \Rightarrow B$ *est un objet de* $\mathbb{C}$ *;*
– *pour toute flèche* f *de* $A \times B$ *vers* C*,* $\Lambda(f)$ *est une flèche de* A *vers* $B \Rightarrow C$ *;*
– $ev = (ev_{A,B})_{A,B\in\mathbb{C}}$ *est une flèche de* $(B \Rightarrow A) \times B$ *vers* A *;*
– *pour toute flèche* h *de* $C \times B$ *vers* A*,* $ev_{A,B} \circ \langle\Lambda(h) \circ {\pi^1}_{C,B}, {\pi^2}_{C,B}\rangle = h$ *;*
– *pour toute flèche* k *de* C *vers* $B \Rightarrow A$*,* $\Lambda(ev_{A,B} \circ \langle k \circ {\pi^1}_{C,B}, {\pi^2}_{C,B}\rangle) = k$*.*

Catégories monoïdales

Une catégorie monoïdale est un 6-uplet $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, où
– $\mathbb{C}$ est une catégorie ;
– $\otimes$ est un foncteur de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$;
– I est un objet de $\mathbb{C}$;
– $\alpha_{A,B,C}$ est un isomorphisme naturel en A, B et C de $A \otimes (B \otimes C)$ vers $(A \otimes B) \otimes C$;
– λ_A est un isomorphisme naturel en A de $I \otimes A$ vers A ;
– et ρ_A est un isomorphisme naturel en A de $A \otimes I$ vers A
tels que certains diagrammes commutent.

Les catégories monoïdales et les foncteurs monoïdaux forment une catégorie **MonCat**. Cette catégorie a un produit cartésien $\times$ évident, donc, pour toute catégorie monoïdale C, on a un foncteur monoïdal diagonal Δ_C de C vers $C \times C$.

De plus, pour toute catégorie monoïdale $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, on a un foncteur monoïdal $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ de C vers C, où T est le foncteur qui envoie tout objet sur I et toute flèche sur id_I, $\mathsf{m} = (\lambda_I)_{A\in Ob(\mathbb{C})}$ et $\mathsf{n} = id_I$. On notera $*_C$ ce foncteur monoïdal.

Etant donnée une catégorie monoïdale $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, pour tout entier n, pour tous objets $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, $\bigotimes\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$:
– si $n = 0$, alors $\bigotimes\langle A_1, \ldots, A_n\rangle = I$;
– si $n = 1$, alors $\bigotimes\langle A_1, \ldots, A_n\rangle = A_1$;
– si $n \geq 1$, alors $\bigotimes\langle A_1, \ldots, A_{n+1}\rangle = \bigotimes\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \otimes A_{n+1}$.
On écrira aussi $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ au lieu de $\bigotimes\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$.

De même, pour tout entier n, pour toutes flèches $f_1, \ldots, f_n$ dans $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, $\bigotimes\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$:
– si $n = 0$, alors $\bigotimes\langle f_1, \ldots, f_n\rangle = id_I$;
– si $n = 1$, alors $\bigotimes\langle f_1, \ldots, f_n\rangle = f_1$;
– si $n \geq 1$, alors $\bigotimes\langle f_1, \ldots, f_{n+1}\rangle = \bigotimes\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \otimes f_{n+1}$.
On écrira aussi $\bigotimes_{i=1}^{n} f_i$ au lieu de $\bigotimes\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$.

Pour tout entier $n \geq 1$, pour tous entiers $p_1, \ldots, p_n$, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, une flèche $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)}$ de $\bigotimes_{k=1}^{p} A$ vers $\bigotimes_{i=1}^{n} \bigotimes_{k=1}^{p_i} A$ dans $\mathbb{C}$, où $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$:

– si $n = 1$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} = id_{\bigotimes_{k=1}^{p} A}$;
– si $n = 2$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)}$ est défini par induction sur p_2 :
  – si $p_2 = 0$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} = \rho_{\bigotimes_{j=1}^{p_1} A}{}^{-1}$;
  – si $p_2 = 1$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} = \begin{cases} \lambda_A{}^{-1} & \text{si } p_1 = 0\,; \\ id_{\bigotimes_{j=1}^{p_1+1} A} & \text{sinon}\,; \end{cases}$
  – si $p_2 \geq 1$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n+1)} = \alpha^{-1}_{\bigotimes_{j=1}^{p_1} A, \bigotimes_{j=1}^{p_2} A, A} \circ (\alpha_A^{(p_1,p_2)} \otimes id_A)$;
– si $n \geq 2$, alors $\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_{n+1})} = (\alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} \otimes id_{\bigotimes_{k=1}^{p_{n+1}} A}) \circ \alpha_A^{(\sum_{i=1}^{n} p_i, p_{n+1})}$.

Pour tout entier n, on peut définir une flèche inversible can^n de $\bigotimes_{i=1}^{n} I$ vers I :

– si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $\mathrm{can}^n = id_I$;
– si $n \geq 1$, alors $\mathrm{can}^{n+1} = \rho_I \circ (\mathrm{can}^n \otimes id_I)$.

Si n est strictement négatif, can^n est l'inverse de can^{-n}.

Pour tous entiers m et n, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, une flèche $\mathrm{can}_A^{m,n}$ de $\bigotimes\langle \underbrace{I, \ldots, I}_{m \text{ fois}}, A, \underbrace{I, \ldots, I}_{n \text{ fois}} \rangle$ vers A dans $\mathbb{C}$:

– si $n = 0$, alors $\mathrm{can}_A^{m,n} = \begin{cases} id_A & \text{si } m = 0\,; \\ \lambda_A \circ (\mathrm{can}^m \otimes id_A) & \text{sinon}\,; \end{cases}$;
– $\mathrm{can}_A^{m,n+1} = \rho_A \circ (\mathrm{can}_A^{m,n} \otimes id_I)$.

Catégories monoïdales symétriques

Une catégorie monoïdale symétrique est un 7-uplet $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$, où

– $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ est une catégorie monoïdale
– et $\gamma_{A,B}$ est un isomorphisme naturel en A et B de $A \otimes B$ vers $B \otimes A$

tels que certains diagrammes commutent.

Soit $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ une catégorie monoïdale symétrique.

Pour tout entier n, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit une transformation naturelle en A σ_A de $\bigotimes_{i=1}^{n} A_i$ vers $\bigotimes_{i=1}^{n} A_{\sigma(i)}$ à l'aide de α, λ, ρ et γ.

Pour tous objets A, B, C et D de $\mathbb{C}$, on définit $\sim_{A,B,C,D} \in \mathbb{C}[(A \otimes B) \otimes (C \otimes D), (A \otimes C) \otimes (B \otimes D)]$ en posant

$$\sim_{A,B,C,D} = \alpha_{A,C,B\otimes D} \circ (id_A \otimes \alpha^{-1}_{C,B,D}) \circ (id_A \otimes (\gamma_{B,C} \otimes id_D)) \circ (id_A \otimes \alpha_{B,C,D}) \circ \alpha^{-1}_{A,B,C\otimes D} \ .$$

Remarque 1.1.3. *On a $\gamma_{I,I} = id_{I\otimes I}$ donc, pour tous objets A et D, on a $\sim_{A,I,I,D} = id_{(A\otimes I)\otimes(I\otimes D)}$.*

Remarque 1.1.4. *On a $(\rho_A \otimes (\lambda_B \circ can^n)) \circ \sim_{A, \bigotimes_{i=1}^{n} I, I, B} = (\rho_A \circ (id_A \otimes can^n)) \otimes \lambda_B$.*

Remarque 1.1.5. *Pour tous objets A, B et C, on a*

$$(id_{A\otimes C} \otimes \rho_B) \circ \sim_{A,B,C,I} = \alpha_{A,C,B} \circ (id_A \otimes \gamma_{B,C}) \circ \alpha_{A,B,C}{}^{-1} \circ (id_{A\otimes B} \otimes \rho_C) \ .$$

Pour tout entier n, pour tous objets $A_1, \ldots, A_n$, on peut définir, par induction sur n, $\sim_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \in \mathbb{C}[\bigotimes_{i=1}^{n}(A_i \otimes A_i), \bigotimes_{i=1}^{n} A_i \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} A_i]$:

– $\sim_{\langle\rangle} = \mathrm{can}^{-2}$;
– $\sim_{\langle A_1\rangle} = id_{A_1\otimes A_1}$;

– $\sim_{\langle A_1,A_2\rangle} = \sim_{A_1,A_1,A2,A_2}$;
– si $n \geq 2$, $\sim_{\langle A_1,\ldots,A_{n+1}\rangle} = \sim_{\bigotimes_{i=1}^{n} A_i, A_{n+1}} \circ (\sim_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \otimes id_{A_{n+1}\otimes A_{n+1}})$.

Pour tout entier n, on définit aussi, par induction sur n, une flèche $\sim_{A,B}^{n}$ de $\bigotimes_{i=1}^{n} A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} B$ vers $\bigotimes_{i=1}^{n}(A \otimes B)$ pour tous objets A et B de $\mathbb{C}$:
– si $n = 0$, alors $\sim_{A,B}^{n} = \mathrm{can}^2$;
– si $n = 1$, alors $\sim_{A,B}^{n} = id_{A\otimes B}$;
– si $n = 2$, alors $\sim_{A,B}^{n} = \sim_{\langle A,B\rangle}$;
– si $n \geq 2$, alors $\sim_{A,B}^{n+1} = (\sim_{A,B}^{n} \otimes id_{A\otimes B}) \circ \sim_{\bigotimes_{i=1}^{n} A,A,\bigotimes_{i=1}^{n} B,B}$.

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, pour tous entiers n et p, on définit, par induction sur p, une flèche $\sim_{A}^{n,p}$ de $\bigotimes_{j=1}^{p} \bigotimes_{i=1}^{n} T(A)$ vers $\bigotimes_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{p} T(A)$:
– si $p = 0$, alors $\sim_{A}^{n,p} = \mathrm{can}^{-n}$;
– si $p = 1$, alors $\sim_{A}^{n,p} = id_{\bigotimes_{j=1}^{p} T(A)}$;
– si $p \geq 1$, alors $\sim_{A}^{n,p+1} = \sim^{n}_{\bigotimes_{j=1}^{p} T(A),T(A)} \circ (\sim_{A}^{n,p} \otimes id_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A)})$.

Une catégorie monoïdale symétrique fermée est une catégorie monoïdale symétrique $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ telle que pour tout objet B de $\mathbb{C}$, on a une adjonction $(- \otimes B, B \multimap -, \xi^B)$. On peut alors poser pour tous objets B et C de $\mathbb{C}$ $\epsilon_{C,B} = (\xi^{B}_{B\multimap C,C})^{-1}(id_{B\multimap C})$.

On peut maintenant donner la définition de *catégorie $*$-autonome* due à Barr (voir [6] et [7]) : une catégorie $*$-autonome est une catégorie monoïdale symétrique fermée $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ munie d'un objet $\perp$ de $\mathbb{C}$ telle que pour tout objet A de $\mathbb{C}$ le morphisme $\xi^{A\multimap\perp}_{A,\perp}(\epsilon_{\perp,A} \circ \gamma_{A,A\multimap\perp})$ de A vers $(A \multimap \perp) \multimap \perp$ a un inverse.

1.2 Catégories enrichies

En ce qui concerne les catégories enrichies sur une catégorie monoïdale, la principale référence est [32].

Soit $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, J, a, l, r)$ une catégorie monoïdale. Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est un quadruplet $\mathfrak{C} = (O, \mathfrak{C}(A, B)_{A,B\in O}, M, j)$ tel que
– pour tous $A, B \in O$, $\mathfrak{C}(A, B)$ est un objet de la catégorie $\mathbb{V}$;
– pour tous $A, B, C \in O$, $M_{A,B,C}$ est une flèche de $\mathfrak{C}(B, C) \otimes_{\mathcal{V}} \mathfrak{C}(A, B)$ vers $\mathfrak{C}(A, C)$ dans $\mathbb{V}$;
– pour tout $A \in O$, j_A est une flèche de J vers $\mathfrak{C}(A, A)$ dans $\mathbb{V}$;

on demande, en plus, que certains diagrammes commutent.

Les éléments de O sont les *objets* de $\mathfrak{C}$.

Exemple 1.2.1. *Dans le Chapitre 4, on considérera des catégories enrichies sur la catégorie monoïdale des monoïdes commutatifs (ici, J est le monoïde commutatif $(\mathbb{N}, +, 0)$ des entiers naturels). Se donner une catégorie enrichie $\mathfrak{C}$ sur la catégorie monoïdale des monoïdes commutatifs $\mathfrak{C}$ revient à se donner :*
– *une catégorie $\mathbb{C}$*
– *et, pour tous objets A et B de $\mathbb{C}$, un monoïde commutatif $\mathbb{C}(A, B) = (\mathbb{C}[A, B], +, 0^{A}_{B})$*

de telle sorte que pour tous objets A, B et C de $\mathbb{C}$, on ait :
– *pour toutes flèches g_1 et g_2 de B vers C, pour toute flèche f de A vers B, $(g_1 + g_2) \circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f)$;*
– *pour toute flèche f de A vers B, $0^{C}_{B} \circ f = 0^{B}_{A}$;*
– *et, pour toute flèche g de B vers C, pour toutes flèches f_1 et f_2 de A vers B, $g \circ (f_1 + f_2) = (g \circ f_1) + (g \circ f_2)$.*

– *pour toute flèche g de B vers C, $g \circ 0_A^B = 0_A^C$;*
On dira que $\mathbb{C}$ est la catégorie sous-jacente de $\mathfrak{C}$.

Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ deux catégories enrichies sur une catégorie monoïdale $\mathcal{V}$. Un foncteur enrichi $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$ consiste en une fonction des objets de $\mathfrak{C}$ vers les objets de $\mathfrak{D}$ et en la donnée pour tous objets A et B de $\mathfrak{C}$ d'une flèche de $\mathfrak{C}(A, B)$ vers $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(A), \mathfrak{F}(B))$ telles que certains diagrammes commutent dans la catégorie $\mathbb{V}$.

Les catégories enrichies sur $\mathcal{V}$ avec les foncteurs enrichis sur $\mathcal{V}$ forment une catégorie : si $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux foncteurs de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{D}$ enrichis sur $\mathcal{V}$, alors une *transformation naturelle de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{G}$ enrichie sur $\mathcal{V}$* est une famille $(a_A)_{A \in ob(\mathfrak{C})}$ telle que, pour tout objet A de $\mathfrak{C}$, a_A est une flèche de J vers $\mathfrak{D}(\mathfrak{F}(A), \mathfrak{G}(A))$ dans $\mathcal{V}$ et telle qu'un certain diagramme commute dans $\mathbb{V}$.

Si, maintenant, $\mathcal{V} = (\mathbb{V}, \otimes_{\mathcal{V}}, J, a, l, r, s)$ est une catégorie monoïdale *symétrique*, alors la catégorie des catégories enrichies sur $\mathcal{V}$ peut être munie d'une structure de catégorie monoïdale. On peut alors définir de manière similaire à ce que l'on fait pour les catégories ordinaires ce qu'est une catégorie monoïdale (symétrique) enrichie sur $\mathcal{V}$.

Exemple 1.2.2. *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie enrichie sur la catégorie monoïdale* symétrique *$\mathcal{M}$ des monoïdes commutatifs. Se donner un foncteur enrichi $\otimes$ sur $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{C} \otimes_{\mathcal{V}} \mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}$ revient à se donner un foncteur $\otimes$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ tel que*

– *pour toute flèche f de A vers B dans $\mathbb{C}$, on a $f \otimes 0_{B'}^{A'} = 0_{B\otimes B'}^{A\otimes A'}$;*
– *pour toute flèche f' de A' vers B' danss $\mathbb{C}$, on a $0_B^A \otimes f' = 0_{B\otimes B'}^{A\otimes A'}$;*
– *pour toutes flèche f de A vers B dans $\mathbb{C}$, pour toutes flèches f'_1 et f'_2 de A' vers B' dans $\mathbb{C}$, on a $f \otimes (f'_1 + f'_2) = (f \otimes f'_1) + (f \otimes f'_2)$;*
– *pour toutes flèches f_1 et f_2 de A vers B dans $\mathbb{C}$, pour toute flèche f' de A' vers B' dans $\mathbb{C}$, on a $(f_1 + f_2) \otimes f' = (f_1 \otimes f') + (f_2 \otimes f')$;*

on dira que ce foncteur est le foncteur sous-jacent de celui qui est enrichi sur $\mathcal{M}$.

Se donner une catégorie monoïdale symétrique enrichie sur $\mathcal{M}$ revient à se donner une catégorie monoïdale (symétrique) $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ avec $\mathbb{C}$ tel que dans l'Exemple 1.2.1 et $\otimes$ tel que ci-dessus : cette catégorie monoïdale symétrique est la catégorie monoïdale symétrique sous-jacente *de la catégorie monoïdale symétrique enrichie sur $\mathcal{M}$.*

Chapitre 2

La logique linéaire

Pour une introduction à la logique linéaire, on renvoie à [27]. Il ne s'agit ici que de fixer la syntaxe à laquelle nous nous référerons. On ne considérera que le fragment propositionnel.

2.1 Les formules

2.1.1 Le fragment intuitionniste

Le fragment intuitionniste multiplicatif exponentiel (IMELL)

$$A, B := X \mid A \multimap B \mid A \otimes B \mid !A \mid \mathbf{1}$$

Avec les additifs

$$A, B := X \mid A \multimap B \mid A \otimes B \mid !A \mid \mathbf{1} \mid A \& B \mid \mathbf{T}$$

2.1.2 La logique linéaire classique

Le fragment multiplicatif exponentiel (MELL)

$$A, B := X \mid X^\perp \mid A \wp B \mid A \otimes B \mid !A \mid ?A \mid \mathbf{1} \mid \perp$$

On définit $A^\perp$ par induction sur A :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \mathbf{1}^\perp &=& \perp & \perp^\perp &=& \mathbf{1} \\ (X)^\perp &=& X^\perp & (X^\perp)^\perp &=& X \\ (A \otimes B)^\perp &=& A^\perp \wp B^\perp & (A \wp B)^\perp &=& A^\perp \otimes B^\perp \\ (!A)^\perp &=& ?A^\perp & (?A)^\perp &=& !A^\perp \end{array}$$

Avec les additifs

$$A, B := X \mid X^\perp \mid A \wp B \mid A \otimes B \mid !A \mid ?A \mid \mathbf{1} \mid \perp \mid A \& B \mid A \oplus B \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{0}$$

On définit $A^\perp$ par induction sur A :

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathbf{1}^\perp &=& \perp & \perp^\perp &=& \mathbf{1} \\
\mathbf{0}^\perp &=& \mathbf{T} & \mathbf{T}^\perp &=& \mathbf{0} \\
(X)^\perp &=& X^\perp & (X^\perp)^\perp &=& X \\
(A \otimes B)^\perp &=& A^\perp \wp B^\perp & (A \wp B)^\perp &=& A^\perp \otimes B^\perp \\
(!A)^\perp &=& ?A^\perp & (?A)^\perp &=& !A^\perp \\
(A \oplus B)^\perp &=& A^\perp \& B^\perp & (A \& B)^\perp &=& A^\perp \oplus B^\perp
\end{array}
$$

2.2 Le calcul des séquents

2.2.1 Le fragment intuitionniste

Les séquents sont de la forme $\Gamma \vdash A$.

Le fragment intuitionniste multiplicatif exponentiel (IMELL)

$$\frac{}{A \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A_1, A_2, \Delta \vdash B}{\Gamma, A_2, A_1, \Delta \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta, \Gamma \vdash A \otimes B}$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash A} \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B} \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}$$

Avec les additifs

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathbf{T}}$$

2.2.2 La logique linéaire classique

Les séquents sont de la forme $\vdash \Delta$.

Le fragment multiplicatif exponentiel (MELL)

$$\frac{}{\vdash A^\perp, A} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

$$\frac{\vdash A_1, \ldots, A_n}{\vdash A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(n)}} \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

$$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash B, \Delta}{\vdash \Gamma, A \otimes B, \Delta} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B}$$

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} \qquad \frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A}$$

Avec les additifs

$$\frac{}{\vdash \Gamma, \mathbf{T}}$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \Gamma, B}{\Gamma, A \& B}$$

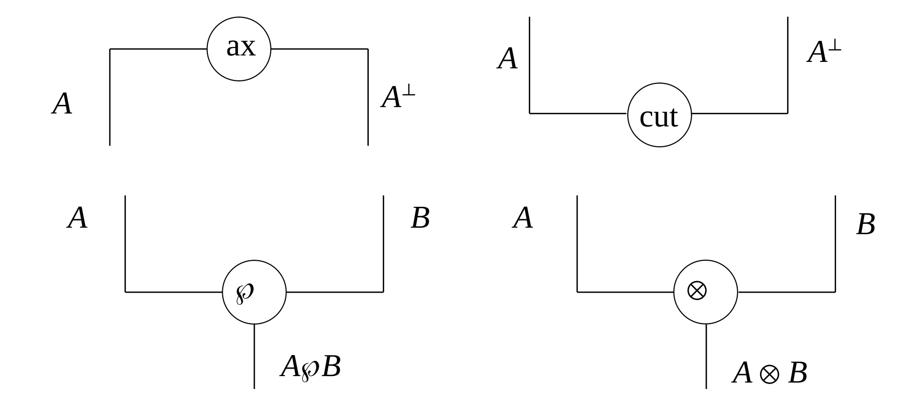
$$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}$$

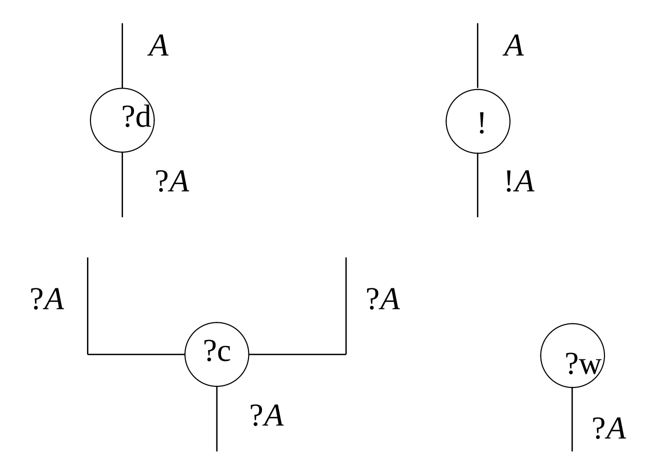
2.3 Les réseaux

Les réseaux ont été introduits dans [25] et étudiés dans [52] et [45].

2.3.1 Les structures de preuve de MELL

Les structures de preuves sont les graphes orientés étiquetés π formés des nœuds





tels que

– chaque arête est conclusion d'exactement un nœud ;
– à chaque nœud ! o est associé un sous-graphe π^o de π tel que
  – une des conclusions de π^o est la prémisse de o
  – et les autres conclusions de π^o sont étiquetées par des formules commençant par ? ;

  π^o est la boîte exponentielle de o et est délimité par un rectangle ;
– si deux boîtes exponentielles ne sont pas disjointes, alors l'une des deux est incluse dans l'autre.

De plus, on identifie deux structures de preuve qui ne diffèrent que par l'ordre des prémisses dans les nœuds contraction (?c).

2.3.2 Séquentialisation

A toute preuve en calcul des séquents, on peut associer une structure de preuve. Un réseau de preuve est une structure de preuve pour laquelle il existe une preuve en calcul des séquents qui lui est associée.

Première partie

Sémantiques de la logique linéaire et réseaux différentiels

"Grise est la théorie, mon ami, mais vert est
l'arbre éternel de la vie."
Goethe

Chapitre 3

Qu'est-ce qu'un modèle catégorique de la logique linéaire ?

3.1 Le deuxième sous-sol

On cherche à interpréter la syntaxe de la logique linéaire dans une structure catégorique : les énoncés sont des objets de la catégorie et les démonstrations sont des flèches. La coupure devient la composition des flèches et on veut que cette interprétation soit invariante au cours de l'élimination des coupures.

Dans un premier temps, on ne considérera que le fragment multiplicatif exponentiel intuitionniste de la logique linéaire (IMELL). La traduction de Girard ($A \Rightarrow B = !A \multimap B$) permet de traduire le lambda-calcul dans la logique linéaire modulo quelques quotients sur la syntaxe : on demandera donc en plus de l'invariance de l'interprétation au cours de l'élimination des coupures que l'interprétation respecte ces quotients ; cela signifie qu'à partir d'une interprétation catégorique $(\mathbb{C}, \ldots)$ de IMELL, on est capable d'exhiber une autre structure catégorique $(\mathbb{K}, \ldots)$ dans laquelle on peut interpréter le lambda-calcul.

Les premiers travaux s'attaquant à ce problème sont ceux de Lafont ([38]) et de Seely([48]) - on peut se référer à [43] pour une vue d'ensemble de l'état de l'art. Quant aux travaux de Benton, Bierman, Hyland et de Paiva ([9], [10] et [11]), ils ont abouti à l'axiomatique suivante : un modèle catégorique de IMELL est un quadruplet $(C, \mathcal{L}, c, w)$ tel que :

- $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ est une catégorie monoïdale symétrique fermée ;
- $\mathcal{L} = ((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d)$ est une comonade monoïdale symétrique dans C ;
- c est une transformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $\otimes \circ \Delta_C \circ (T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ et w est une transformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $*_C$ telles que
  - pour tout objet A de $\mathbb{C}$, (TA, δ_A), $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ est un comonoïde cocommutatif dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, \mathsf{n}), \alpha, \lambda, \rho)$
  - et pour tout $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(TA, \delta_A), (TB, \delta_B)]$, f est un morphisme de comonoïdes,

  où $\mathbb{T}$ est la comonade (T, δ, d) dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ est la catégorie des $\mathbb{T}$-cogèbres.

Si A est un atome, l'axiome prouvant $!A \vdash !A$ et l'êta-expansé de cette preuve y sont interprétés par le même morphisme : $id_{T(A)}$. On va voir qu'il existe des modèles de la logique linéaire qui ne vérifient pas cette propriété. C'est pourquoi on cherche une nouvelle définition de modèle de IMELL, plus faible que celle donnée ci-dessus, permettant de capturer les modèles en question. Le point de départ est l'idée que l'on doit interpréter la première preuve par $id_{T(A)}$ et la seconde par $T(id_A)$ et que l'on ne doit pas demander d'avoir $T(id_A) = id_{T(A)}$, autrement dit T ne sera plus un foncteur, mais

seulement un semi-foncteur. La notion de semi-foncteur, ainsi que celles de transformation naturelle entre semi-foncteurs, de semi-adjonction et de structure de semi-catégorie cartésienne fermée ont été introduites par Hayashi dans [29] dans le but de fournir un cadre catégorique à la sémantique du lambda-calcul. De même, afin de pouvoir donner cette nouvelle définition de modèle de IMELL, nous allons introduire des affaiblissements des notions de comonade et de comonade monoïdale.

3.2 Monades faibles (monoïdales)

3.2.1 Semi-monades

Définition 3.2.1 ([29]). *Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux catégories. Un* semi-foncteur *T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ consiste en une fonction des objets de $\mathbb{C}$ vers les objets de $\mathbb{D}$ et en la donnée, pour tous objets A et B de $\mathbb{C}$, d'une fonction de $\mathbb{C}[A, B]$ vers $\mathbb{D}[T(A), T(B)]$ telles que $T(f \circ_{\mathbb{C}} g) = T(f) \circ_{\mathbb{D}} T(g)$.*

Autrement dit, un semi-foncteur est un foncteur sauf qu'il ne préserve pas nécessairement les identités.

Exemple 3.2.2. *On peut définir un semi-foncteur T de la catégorie **Rel** des ensembles et relations vers la catégorie **Rel** en posant :*

- *pour tout objet A de **Rel**, $T(A)$ est l'ensemble $A^{<\omega}$ des suites finies à valeurs dans A ;*
- *pour toute flèche f de A vers B dans **Rel**, $T(f)$ est le morphisme de $A^{<\omega}$ vers $B^{<\omega}$ défini par*

$$T(f) = \{(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)} \rangle) \; ; \; n \in \mathbb{N}, \forall i (1 \leq i \leq n \Rightarrow (\alpha_i, \beta_i) \in f) \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \quad .$$

On remarque que T n'est pas un foncteur.

On peut, bien entendu, encore composer des semi-foncteurs comme on compose des foncteurs et obtenir ainsi une catégorie dont les objets sont les catégories et les flèches les semi-foncteurs. On peut encore parler de transformations naturelles d'un semi-foncteur vers un autre semi-foncteur et définir les compositions verticale $\bullet$ et horizontale $\circ$ de transformations naturelles entre semi-foncteurs comme on le fait pour les transformations naturelles entre foncteurs.

- Si F, G et H sont trois semi-foncteurs de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$ et si σ est une transformation naturelle de F vers G et τ est une transformation naturelle de G vers H, alors $\tau \bullet \sigma$ est une transformation naturelle de F vers H définie par $(\tau \bullet \sigma)_C = \tau_C \circ \sigma_C$.
- Si F et G sont deux semi-foncteurs de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$ et F' et G' sont deux semi-foncteurs de la catégorie $\mathbb{D}$ vers la catégorie $\mathbb{E}$ et si σ est une transformation naturelle de F vers G et σ' est une transformation naturelle de F' vers G', alors $\sigma' \circ \sigma$ est une transformation naturelle du semi-foncteur $F' \circ F$ vers le semi-foncteur $G' \circ G$ définie par $(\sigma' \circ \sigma)_C = \sigma'_{G(C)} \circ F'(\sigma_C)$.

On a aussi la notion de *transformation naturelle normale*, qui correspond à ce que Hoofman, dans [30], appelle *semi-transformation naturelle*.

Définition 3.2.3. *Soient F et G deux semi-foncteurs d'une catégorie $\mathbb{C}$ vers une catégorie $\mathbb{D}$. Une transformation naturelle α de F vers G est dite* normale *si pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a*

$$\alpha_C \circ F(id_C) = \alpha_C \quad .$$

Deux remarques : si α est une transformation naturelle d'un semi-foncteur F vers un semi-foncteur G, alors

– α est une transformation naturelle normale de F vers G si, et seulement si, pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a

$$G(id_C) \circ \alpha_C = \alpha_C \;\; ;$$

– si F ou G est un foncteur, alors α est une transformation naturelle normale de F vers G.

Plus tard, nous voudrons considérer certaines transformations naturelles normales particulières : les *semi-isomorphismes naturels normaux*. La notion de *semi-isomorphisme naturel normal* généralise la notion d'isomorphisme naturel.

Définition 3.2.4. *Un semi-isomorphisme naturel normal α d'un semi-foncteur F vers un semi-foncteur G est une transformation naturelle normale de F vers G telle qu'il existe une transformation naturelle normale β de G vers F telle que pour tout objet C de $\mathbb{C}$, on a*

$$\alpha_C \circ \beta_C = G(id_C)$$

et

$$\beta_C \circ \alpha_C = F(id_C) \;\; .$$

On sait déjà que la catégorie des catégories et des semi-foncteurs existe. Mieux, les données suivantes définissent une 2-catégorie $\mathbf{Cat}_s$:

– les objets sont les catégories ;
– pour tous objets $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$, $\mathbf{Cat}_s(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ est la catégorie dont les objets sont les semi-foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$, dont les flèches sont les transformations naturelles normales, dont la composition est la composition verticale $\bullet$ et dont l'identité d'un semi-foncteur F est $(F(id_C))_{C \in Ob(\mathbb{C})}$;
– la composition est la composition des semi-foncteurs et la composition verticale $\circ$ des transformations naturelles normales ;
– l'identité d'un objet $\mathbb{C}$ est le foncteur identité $id_{\mathbb{C}}$ de la catégorie $\mathbb{C}$ et la transformation naturelle identité $id_{id_{\mathbb{C}}}$ de $id_{\mathbb{C}}$ vers $id_{\mathbb{C}}$.

Or, étant donnée une 2-catégorie $\mathbf{C}$, on peut toujours définir ce qu'est une monade relativement à $\mathbf{C}$, comme le fait R. Street dans [49].

Définition 3.2.5 ([49]). *Soit* $\mathbf{C}$ *une 2-catégorie. Une monade (T, η, μ) relativement à* $\mathbf{C}$ *dans un objet $\mathbb{C}$ de* $\mathbf{C}$ *consiste en*

– *une flèche T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$;*
– *une 2-flèche η de $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ vers T ;*
– *une 2-flèche μ de $T \circ T$ vers T*

tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T & \xrightarrow{\mu \circ \mathrm{id}_T} & T \circ T \\ {\scriptstyle id_T \circ \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ T \circ T & \xrightarrow[\mu]{} & T \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\eta \circ id_T} & T \circ T \\ & {\scriptstyle id_T}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ & & T \end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} T \circ T & \xleftarrow{T \circ \eta} & T \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_T} & \\ T & & \end{array} \tag{3}$$

commutent dans la catégorie $\mathbf{C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Bien entendu, une monade au sens usuel est la même chose qu'une monade relativement à la 2-catégorie **Cat** des catégories, foncteurs et transformations naturelles. On peut maintenant définir ce qu'est une *semi-monade*[1].

Définition 3.2.6. *Une semi-monade dans une catégorie* $\mathbb{C}$ *est une monade relativement à* $\mathbf{Cat}_s$ *dans la catégorie* $\mathbb{C}$.

La proposition suivante donne une caractérisation des semi-monades dans une catégorie $\mathbb{C}$. C'est ainsi que [30] définit les semi-(co)monades.

Proposition 3.2.7. (T,μ,η) *est une semi-monade dans une catégorie* $\mathbb{C}$ *si, et seulement si,*

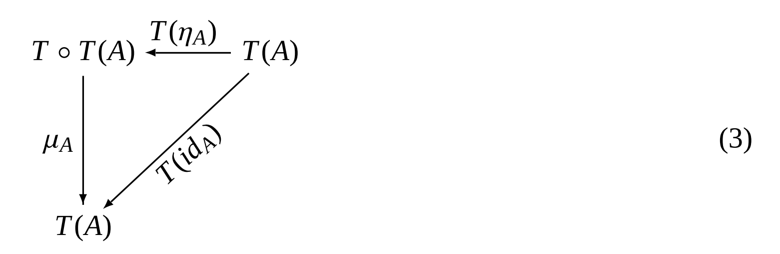
- T *est un semi-foncteur de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}$ *;*
- η *est une transformation naturelle de* $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ *vers* T *;*
- *et* μ *est une transformation naturelle de* $T \circ T$ *vers* T

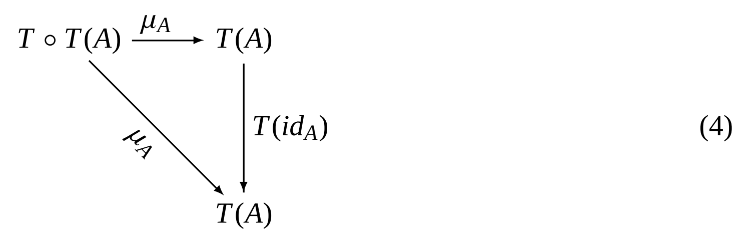
tels que, pour tout objet A *de* $\mathbb{C}$*, les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(A) & \xrightarrow{\mu_{T(A)}} & T \circ T(A) \\ {\scriptstyle T(\mu_A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ T \circ T(A) & \xrightarrow[\mu_A]{} & T(A) \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & T \circ T(A) \\ & \searrow{\scriptstyle T(\mathrm{id}_A)} & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ & & T(A) \end{array} \tag{2}$$

[1]Du fait de notre ignorance de [30], ces *semi-monades* étaient auparavant dénommées *semi-monades normales*. En fait, cette notion est exactement la même que ce que Hoofman, dans [30], appelle *semi-monad*. Pour éviter toute confusion, la notion introduite dans la Sous-section 3.2.2, auparavant dénommée *semi-monade*, a été renommée *monade faible*. L'ancienne terminologie avait un autre inconvénient par rapport à la nouvelle : elle pouvait sembler sous-entendre qu'une *semi-monade normale* (c'est-à-dire, désormais, une *semi-monade*) est nécessairement une *semi-monade* (c'est-à-dire, désormais, une *monade faible*), ce qui est faux, comme on va le voir. Enfin, on peut essayer de voir une justification du terme *monade faible* en le fait que, en un certain sens, une *monade faible* est une notion plus forte que celle de *semi-monade* ; or, de même, la notion de *catégorie cartésienne fermée faible* est plus forte que celle de *semi-catégorie cartésienne fermée*.





commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Démonstration. Les diagrammes (1), (2) et (3) correspondent respectivement aux diagrammes (1), (2) et (3) de la Définition 3.2.5. Le diagramme (4) exprime la normalité de μ. □

Le diagramme (1) exprime l'associativité de la multiplication μ : on retrouve exactement le même diagramme dans la définition d'une monade. Les diagrammes (2) et (3) expriment la neutralité de η par rapport à μ et correspondent aux deux autres diagrammes habituels requis dans la définition d'une monade ; mais, maintenant, on n'a plus nécessairement $T(id_A) = id_{T(A)}$: ici, on demande que la composée des deux flèches soit égale à $T(id_A)$. Enfin, on requiert le diagramme (4), qui est, évidemment, automatiquement satisfait dans le cas d'une monade.

En considérant ces diagrammes, on peut se convaincre que la notion de semi-comonade est un bon point de départ pour fournir une interprétation des réseaux êta-expansés. Mais comment interpréter *tous* les réseaux ? Si un réseau et son êta-expansé n'ont pas la même interprétation, alors on a besoin d'une comultiplication non normale. En effet, le réseau de la Figure 3.1 ne se réduit pas en celui de la Figure 3.2.

D'où l'idée d'avoir un autre affaiblissement de la notion de monade de telle sorte que, cette fois, la multiplication ne soit plus normale.

Mais si, pour capturer cette notion, on essaye de procéder de la même manière que pour capturer la notion de semi-monade, on bute sur le problème suivant : on n'arrive pas à définir une 2-catégorie ayant comme objets les catégories, comme flèches les foncteurs et comme 2-flèches les transformations naturelles. En effet, cette fois, l'identité d'un semi-foncteur F de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$ ne peut plus être $(F(id_C))_{C \in Ob(\mathbb{C})}$, ce doit être $id_F = (id_{F(C)})_{C \in Ob(\mathbb{C})}$. Or, maintenant, la composition horizontale $\circ$ n'est plus fonctorielle : si F n'est pas un foncteur, alors $id_F \circ id_{id_{\mathbb{C}}} \neq id_F$. Alors ?

3.2.2 Monades faibles

En considérant à nouveau la Définition 3.2.5, on constate qu'on aurait pu définir une monade dans une 2-catégorie $\mathbf{C}$ autrement. En effet, étant donnée une 2-catégorie $\mathbf{C}$ et un objet $\mathbb{C}$ de $\mathbf{C}$, il est clair que $(\mathbf{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \circ, id_{\mathbb{C}})$ est une catégorie monoïdale stricte. Une monade relativement à $\mathbf{C}$ dans un objet $\mathbb{C}$ de $\mathbf{C}$ n'est alors rien d'autre qu'un monoïde dans la catégorie monoïdale stricte $(\mathbf{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \circ, id_{\mathbb{C}})$.

Etant donnée une catégorie $\mathbb{C}$, on note $\mathbf{1/2End}(\mathbb{C})$ la catégorie dont les objets sont les semi-foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, dont les flèches sont les transformations naturelles, dont la composition est la composition verticale $\bullet$ et dont l'identité d'un objet F est $(id_{F(C)})_{C \in \mathbb{C}}$. On a déjà vu que $\circ$ n'est pas un

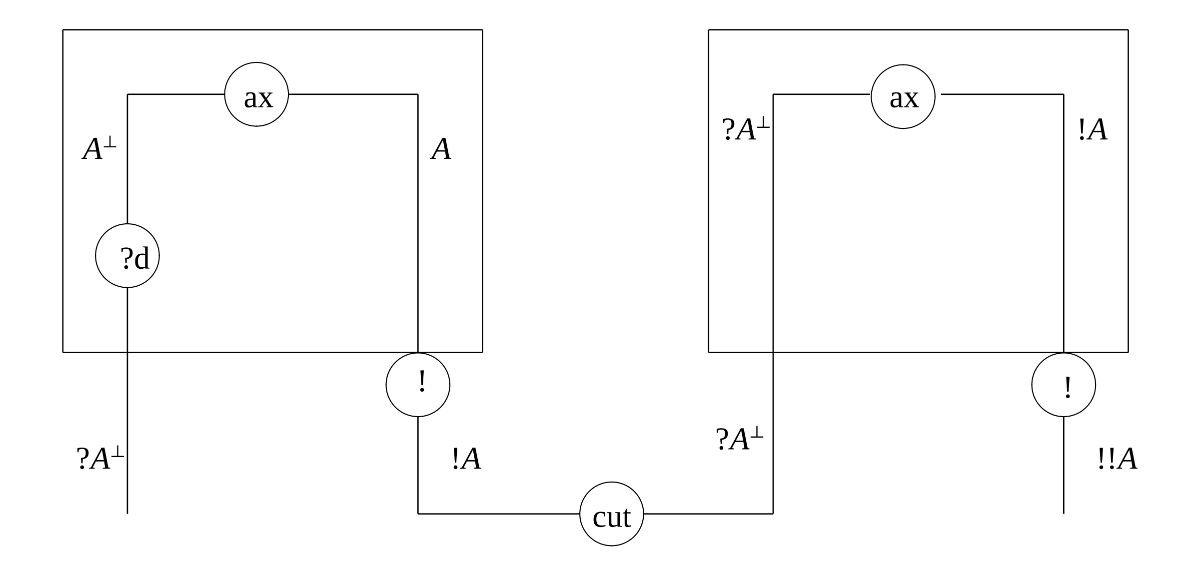


FIG. 3.1 –

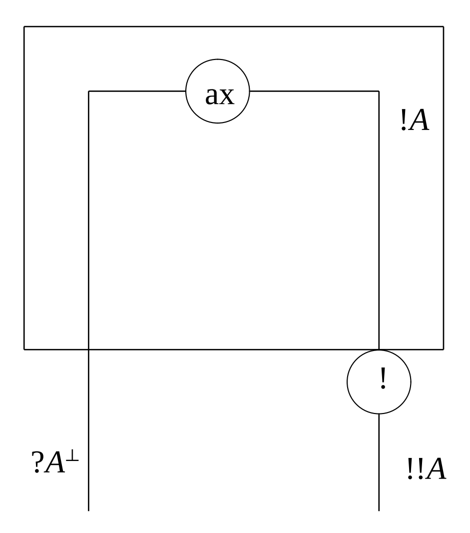


FIG. 3.2 –

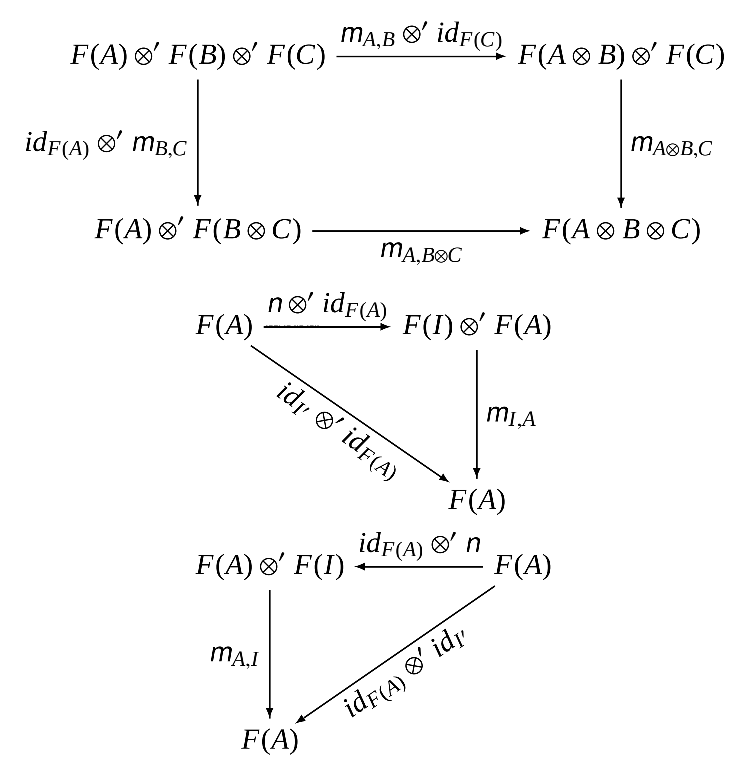
foncteur. Donc $(\mathbf{1/2End}(\mathbb{C}), \circ, id_{\mathbb{C}})$ n'est pas une catégorie monoïdale stricte. Mais presque... C'est un exemple de ce que nous appelons une *catégorie semi-monoïdale stricte*, notion qui généralise celle de catégorie monoïdale stricte.

Définition 3.2.8. *Une catégorie semi-monoïdale stricte est un triplet* $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ *consistant en*

- *une catégorie* $\mathbb{C}$ *;*
- *un semi-foncteur* $\otimes$ *de* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}$ *tel que pour tous objets* A, B *et* C *de* $\mathbb{C}$*,* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ *et pour toutes flèches* f, g *et* h *de* $\mathbb{C}$*,* $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ *;*
- *et un objet* I *de* $\mathbb{C}$ *tel que pour tout objet* A *de* $\mathbb{C}$*,* $I \otimes A = A = A \otimes I$*.*

Autrement dit, une catégorie semi-monoïdale stricte $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ est une catégorie monoïdale stricte, sauf que l'on n'a pas nécessairement $id_A \otimes id_B = id_{A\otimes B}$. On peut alors encore parler de *foncteur monoïdal strict* entre catégories semi-monoïdales strictes, comme on le fait pour les catégories monoïdales strictes. Il n'y a rien à changer dans la définition habituelle.

Définition 3.2.9. *Un foncteur monoïdal strict* (F, m, n) *d'une catégorie semi-monoïdale stricte* $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ *vers une catégorie semi-monoïdale stricte* $(\mathbb{C}', \otimes', I')$ *est un triplet consistant en un foncteur* F *de la catégorie* $\mathbb{C}$ *vers la catégorie* $\mathbb{C}'$*, une transformation naturelle* m *normale de* $\otimes' \circ (F \times F)$ *vers* $F \circ \otimes$ *et une flèche* n *dans* $\mathbb{C}'$ *de* I' *vers* $F(I)$ *tels que les trois diagrammes*



commutent dans la catégorie $\mathbb{C}'$*.*

Bien entendu, on peut composer de tels foncteurs monoïdaux entre catégories semi-monoïdales strictes comme on compose des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales strictes.

Définition 3.2.10. *Soient* $(\mathbb{C}, \otimes, I)$*,* $(\mathbb{C}', \otimes', I')$ *et* $(\mathbb{C}'', \otimes'', I'')$ *trois catégories semi-monoïdales strictes. Soient* (F, m, n) *un foncteur monoïdal strict de* $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ *vers* $(\mathbb{C}', \otimes', I')$ *et* (F', m', n') *un foncteur monoïdal strict de* $(\mathbb{C}', \otimes', I')$ *vers* $(\mathbb{C}'', \otimes'', I'')$*. On pose* $(F', m', n') \circ (F, m, n) = (F' \circ F, m'', n'')$*, où* $m'' = (m''_{A,B})_{A,B\in ob(\mathbb{C})}$ *avec* $m''_{A,B} = F'(m_{A,B}) \circ m'_{F(A),F(B)}$ *et* $n'' = F'(n) \circ n'$*.*

On note **1/2MonCat** la catégorie définie ainsi :

– les objets sont les catégories semi-monoïdales strictes ;
– une flèche de C vers C' est un foncteur monoïdal strict de C vers C' ;
– l'identité de $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ est $(id_{\mathbb{C}}, ((id_{A,B})_{A,B \in ob(\mathbb{C})}), id_I)$;
– la composition est celle définie dans la Définition 3.2.10.

La définition suivante généralise la notion de monoïde dans une catégorie monoïdale stricte à celle de monoïde dans une catégorie semi-monoïdale stricte :

Définition 3.2.11. *Un monoïde dans une catégorie semi-monoïdale stricte* $C = (\mathbb{C}, \otimes, I)$ *est un triplet* (A, μ, η) *tel qu'il existe un foncteur monoïdal strict* (F, m, n) *d'un objet terminal* $1 = (\mathbf{1}, \otimes_1, *)$ *de* **1/2*MonCat*** *vers* C *tel que* $A = F(*)$, $\mu = m_{*,*}$ *et* $\eta = n$.

La proposition suivante donne une caractérisation des monoïdes dans une catégorie semi-monoïdale stricte.

Proposition 3.2.12. (A, μ, η) *est un monoïde dans une catégorie semi-monoïdale stricte* $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ *si, et seulement si,* A *est un objet de* $\mathbb{C}$, μ *est une flèche dans* $\mathbb{C}$ *de* $A \otimes A$ *vers* A *et* η *est une flèche dans* $\mathbb{C}$ *de* I *vers* A *tels que les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes id_A} & A \otimes A \\ {\scriptstyle id_A \otimes \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A \otimes A & \xrightarrow[\mu]{} & A \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta \otimes id_A} & A \otimes A \\ & {\scriptstyle id_I \oplus id_A}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ & & A \end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xleftarrow{id_A \otimes \eta} & A \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle id_A \oplus id_I} & \\ A & & \end{array} \qquad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{id_A \otimes id_A} & A \otimes A \\ & {\scriptstyle \mu}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ & & A \end{array} \qquad (4)$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Démonstration. Simple vérification. □

Les diagrammes (1), (2) et (3) sont les mêmes que ceux que doit satisfaire un monoïde dans une catégorie monoïdale stricte. Quant au diagramme (4), il est automatiquement satisfait dès que la catégorie semi-monoïdale stricte est en fait une catégorie monoïdale stricte.

Définition 3.2.13. *Une monade faible dans une catégorie* $\mathbb{C}$ *est un monoïde dans la catégorie semi-monoïdale stricte* $(\mathbf{1/2}\boldsymbol{End}(\mathbb{C}), \circ, id_{\mathbb{C}})$.

La proposition suivante donne une caractérisation des monades faibles dans une catégorie donnée.

Proposition 3.2.14. *Soit* $\mathbb{C}$ *une catégorie. Une monade faible dans une catégorie* $\mathbb{C}$ *consiste en un triplet* (T, μ, η) *où*

- T *est un semi-foncteur de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}$ *;*
- η *est une transformation naturelle de* $id_{\mathbb{C}}$ *vers* T *;*
- *et* μ *est une transformation naturelle de* $T \circ T$ *vers* T

tels que, pour tout objet A *de* $\mathbb{C}$*, les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} T \circ T \circ T(A) & \xrightarrow{\mu_{T(A)}} & T \circ T(A) \\ {\scriptstyle T(\mu_A)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ T \circ T(A) & \xrightarrow[\mu_A]{} & T(A) \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & T \circ T(A) \\ & {\scriptstyle id_{T(A)}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ & & T(A) \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccc} T \circ T(A) & \xleftarrow{T(\eta_A)} & T(A) \\ {\scriptstyle \mu_A}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle T(id_A)} & \\ T(A) & & \end{array} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ccc} T \circ T(A) & \xrightarrow{T(id_{T(A)})} & T \circ T(A) \\ & {\scriptstyle \mu_A}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ & & T(A) \end{array} \tag{4}$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Démonstration. Simple vérification. □

Le diagramme (1) exprime l'associativité de μ : on le retrouve dans la définition d'une monade et d'une semi-monade. Les diagrammes (2) et (3) expriment la neutralité de η pour μ : le (3) se retrouve dans la définition d'une semi-monade, mais pas le (2). Le diagramme (4) est automatiquement satisfait dans une monade : on prendra garde au fait que ce n'est ni celui qui exprimerait la normalité de μ ni celui qui exprime sa naturalité.

Exemple 3.2.15. *Soit T le semi-foncteur de l'Exemple 3.2.2. On note δ la transformation naturelle de $T \circ T$ vers T définie par*

$$\delta_A = \{(a, \langle a_1, \ldots, a_k \rangle)\ ;\ k \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_k \in A^{<\omega} \textit{ et } a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)\}\ ,$$

où $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)$ est l'ensemble des mélanges ("shuffles") de $a_1, \ldots, a_k$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k) \\ = \ & \{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle\ ;\ \exists \sigma \in \mathfrak{S}_{p_1, \ldots, p_k}\ \forall i \in \mathbb{N}\ (1 \leq i \leq k \Rightarrow a_i = \langle \alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{i-1} p_j + 1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{i} p_j)} \rangle)\}\ , \end{aligned}$$

avec $\mathfrak{S}_{p_1, \ldots, p_k}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{\sum_{j=1}^{k} p_j}$ telles que pour $1 \leq i \leq k$, σ est croissante sur l'intervalle $[(\sum_{j=1}^{i-1} p_j) + 1, \sum_{j=1}^{i} p_j]$.

On note d la transformation naturelle de T vers $id_{\mathbf{Rel}}$ définie par

$$d_A = \{(\langle \alpha \rangle, \alpha)\ ;\ \alpha \in A\}\ .$$

*(T, δ, d) est une comonade faible dans **Rel** : ce n'est ni une comonade ni une semi-comonade.*

Comme le montre l'Exemple 3.2.15 une monade faible n'est pas nécessairement une semi-monade. En fait, une monade faible qui est aussi une semi-monade est une monade. C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition 3.2.16. *Soit (T, μ, η) une monade faible dans une catégorie $\mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(T, η, μ) est une semi-monade dans la catégorie $\mathbb{C}$;*
- *la transformation naturelle μ de $T \circ T$ vers T est normale ;*
- *le semi-foncteur T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ est un foncteur ;*
- *la monade faible (T, μ, η) dans la catégorie $\mathbb{C}$ est une monade.*

En un certain sens, la notion de semi-monade est plus générale que la notion de monade faible. C'est ce que précise la proposition suivante.

Proposition 3.2.17. *Soit (T, μ, η) une monade faible dans une catégorie $\mathbb{C}$. On pose $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_A)_{A \in \mathbb{C}}$ avec $\tilde{\mu}_A = T(id_A) \circ \mu_A$. Alors $(T, \tilde{\mu}, \eta)$ est une semi-monade dans la catégorie $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Simple vérification. □

Etant donnée une monade faible $\mathbb{T}$ dans une catégorie $\mathbb{C}$, on pourra donc parler de la *semi-monade induite par la monade faible* $\mathbb{T}$.

Hayashi, dans [29], avait également introduit la notion de semi-adjonction. Quel est le rapport entre, d'une part, les semi-adjonctions de Hayashi et, d'autre part, les semi-monades et les monades faibles ?

3.2.3 Semi-adjonctions

Définition 3.2.18. *[29] Soient $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ deux catégories. Une semi-adjonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ est un quadruplet (F, G, α, β), où F est un semi-foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$, $\alpha = (\alpha_{A,B})_{A \in ob(\mathbb{C}), B \in ob(\mathbb{D})}$ et $\beta = (\beta_{A,B})_{A \in ob(\mathbb{C}), B \in ob(\mathbb{D})}$ tels que, pour tout $f \in \mathbb{D}[B, B']$ et pour tout $g \in \mathbb{C}[A', A]$, les diagrammes*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}[F(A), B] & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & \mathbb{C}[A, G(B)] \\ {\scriptstyle f \circ - \circ F(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G(f) \circ - \circ g} \\ \mathbb{D}[F(A'), B'] & \xrightarrow[\alpha_{A',B'}]{} & \mathbb{C}[A', G(B')] \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}[F(A), B] & \xleftarrow{\beta_{A,B}} & \mathbb{C}[A, G(B)] \\ {\scriptstyle f \circ - \circ F(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G(f) \circ - \circ g} \\ \mathbb{D}[F(A'), B'] & \xrightarrow[\alpha_{A',B'}]{} & \mathbb{C}[A', G(B')] \end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}[F(A), B] & \xrightarrow{\alpha_{A,B}} & \mathbb{C}[A, G(B)] \\ {\scriptstyle f \circ - \circ F(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G(f) \circ - \circ g} \\ \mathbb{D}[F(A'), B'] & \xleftarrow[\beta_{A',B'}]{} & \mathbb{C}[A', G(B')] \end{array} \qquad (3)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}[F(A), B] & \xleftarrow{\beta_{A,B}} & \mathbb{C}[A, G(B)] \\ {\scriptstyle f \circ - \circ F(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G(f) \circ - \circ g} \\ \mathbb{D}[F(A'), B'] & \xleftarrow[\beta_{A',B'}]{} & \mathbb{C}[A', G(B')] \end{array} \qquad (4)$$

*commutent dans la catégorie **Ens**.*

Définition 3.2.19. *Une semi-adjonction (F, G, α, β) de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ est dite* normale *si, et seulement si,*

(i) pour tout $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$, on a $\alpha_{A,B}(f \circ F(id_A)) = \alpha_{A,B}(f)$;

(ii) et pour tout $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$, on a $\beta_{A,B}(G(id_B) \circ g) = \beta_{A,B}(g)$.

Remarque 3.2.20. *Soit (F, G, α, β) une semi-adjonction de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$. Pour tout $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$, on a $\alpha_{A,B}(f \circ F(id_A)) = G(id_B) \circ \alpha_{A,B}(f)$ et pour tout $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$, on a $\beta_{A,B}(G(id_B) \circ g) = \beta_{A,B}(g) \circ F(id_A)$. Donc si F ou G est un foncteur, alors la semi-adjonction (F, G, α, β) de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$ est normale.*

Lemme 3.2.21. *Soit (F, G, α, β) une semi-adjonction normale de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$.*

(i) Pour tout $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$, on a $\beta_{A,B} \circ \alpha_{A,B}(f) = f \circ F(id_A)$.

(ii) Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$, on a $\alpha_{A,B} \circ \beta_{A,B}(g) = G(id_B) \circ g$.

Démonstration. (i) Soit $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$. On a

$$\begin{aligned} \beta_{A,B} \circ \alpha_{A,B}(f) &= \beta_{A,B}(\alpha_{A,B}(f \circ F(id_A))) \\ &\quad \text{(car la semi-adjonction est normale)} \\ &= \beta_{A,B}(G(id_B) \circ \alpha_{A,B}(f) \circ id_A) \\ &\quad \text{(par le Diagramme (1) de la Définition 3.2.18)} \\ &= id_B \circ f \circ F(id_A) \\ &\quad \text{(par le Diagramme (3) de la Définition 3.2.18)} \\ &= f \circ F(id_A) \ . \end{aligned}$$

(ii) Soit $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$. On a

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B} \circ \beta_{A,B}(g) &= \alpha_{A,B}(\beta_{A,B}(G(id_B) \circ g)) \\ &\quad \text{(car la semi-adjonction est normale)} \\ &= \alpha_{A,B}(id_B \circ \beta_{A,B}(g) \circ F(id_A)) \\ &\quad \text{(par le Diagramme (4) de la Définition 3.2.18)} \\ &= G(id_B) \circ g \circ id_A \\ &\quad \text{(par le Diagramme (2) de la Définition 3.2.18)} \\ &= G(id_B) \circ g \ . \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.22. *Soit (F, G, α, β) une semi-adjonction normale de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$.*

(i) Pour tout $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$ et pour tout $h \in \mathbb{C}[A', A]$, on a $\alpha_{A',B}(f \circ F(h)) = \alpha_{A,B}(f) \circ h$.

(ii) Pour tout $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$ et pour tout $k \in \mathbb{D}[B, B']$, on a $\alpha_{A,B'}(k \circ f) = G(k) \circ \alpha_{A,B}(f)$.

(iii) Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$ et pour tout $h \in \mathbb{C}[A', A]$, on a $\beta_{A',B}(g \circ h) = \beta_{A,B}(g) \circ F(h)$.

(iv) Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$ et pour tout $k \in \mathbb{D}[B, B']$, on a $\beta_{A,B'}(G(k) \circ g) = k \circ \beta_{A,B}(g)$.

Démonstration. (i) Soient $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$ et $h \in \mathbb{C}[A', A]$. On a

$$\begin{aligned} \alpha_{A',B}(f \circ F(h)) &= \alpha_{A',B}(id_B \circ f \circ F(h)) \\ &= G(id_B) \circ \alpha_{A,B}(f) \circ h \\ &\quad \text{(par le Diagramme (1) de la Définition 3.2.18)} \\ &= G(id_B) \circ \alpha_{A,B}(f) \circ id_A \circ h \\ &= \alpha_{A,B}(id_B \circ f \circ F(id_A)) \circ h \\ &\quad \text{(par le Diagramme (1) de la Définition 3.2.18)} \\ &= \alpha_{A,B}(f) \circ h \ . \end{aligned}$$

(ii) Soient $f \in \mathbb{D}[F(A), B]$ et $k \in \mathbb{D}[B, B']$. On a

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B'}(k \circ f) &= \alpha_{A,B'}(k \circ f \circ F(id_A)) \\ &\quad \text{(car la semi-adjonction est normale)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= G(k) \circ \alpha_{A,B}(f) \circ id_A \\
&\quad \text{(par le Diagramme (1) de la Définition 3.2.18)} \\
&= G(k) \circ \alpha_{A,B}(f) \ .
\end{aligned}
$$

(iii) Soient $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$ et $h \in \mathbb{C}[A', A]$. On a

$$
\begin{aligned}
\beta_{A',B}(g \circ h) &= \beta_{A',B}(G(id_B) \circ g \circ h) \\
&\quad \text{(car la semi-adjonction est normale)} \\
&= id_B \circ \beta_{A,B}(g) \circ F(h) \\
&\quad \text{(par le Diagramme (4) de la Définition 3.2.18)} \\
&= \beta_{A,B}(g) \circ F(h) \ .
\end{aligned}
$$

(iv) Soient $g \in \mathbb{C}[A, G(B)]$ et $k \in \mathbb{D}[B, B']$. On a

$$
\begin{aligned}
\beta_{A,B'}(G(k) \circ g) &= \beta_{A,B'}(G(k) \circ g \circ id_A) \\
&= k \circ \beta_{A,B}(g) \circ F(id_A) \\
&\quad \text{(par le Diagramme (4) de la Définition 3.2.18)} \\
&= k \circ id_B \circ \beta_{A,B}(g) \circ F(id_A) \\
&= k \circ \beta_{A,B}(G(id_B) \circ g \circ id_A) \\
&\quad \text{(par le Diagramme (4) de la Définition 3.2.18)} \\
&= k \circ \beta_{A,B}(g) \ .
\end{aligned}
$$

□

Proposition 3.2.23. *Soit (F, G, α, β) une semi-adjonction de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$ telle que F est un foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{D}$. On pose $T = G \circ F$. Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on pose $\eta_A = \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})$ et $\mu_A = G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}))$. Alors (T, η, μ) est une semi-monade dans la catégorie $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour tout $f \in \mathbb{C}[A, A']$, on a

$$
\begin{aligned}
T(f) \circ \eta_A &= G(F(f)) \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (ii))} \\
&= \alpha_{A,F(A')}(F(f) \circ id_{F(A)}) \\
&= \alpha_{A,F(A')}(id_{F(A')} \circ F(f)) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (i))} \\
&= \alpha_{A',F(A')}(id_{F(A')}) \circ f \\
&= \eta_{A'} \circ f \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout $f \in \mathbb{C}[A, A']$, on a

$$
\begin{aligned}
T(f) \circ \mu_A &= G(F(f)) \circ G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= G(F(f) \circ \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iv))} \\
&= G(\beta_{T(A),F(A')}(G(F(f)) \circ id_{T(A)}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G(\beta_{T(A),F(A')}(id_{T(A')} \circ T(f))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= G(\beta_{T(A'),F(A')}(id_{T(A')}) \circ F(T(f))) \\
&= G(\beta_{T(A'),F(A')}(id_{T(A')})) \circ G(F(T(f))) \\
&= \mu_{A'} \circ (T \circ T(f)) \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
T(id_A) \circ \mu_A &= G \circ F(id_A) \circ G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= G(F(id_A) \circ \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= G(id_{F(A)} \circ \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&\quad \text{(car } F \text{ est un foncteur)} \\
&= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= \mu_A \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ (F \circ G)(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) &= \beta_{T(T(A)),F(A)}(id_{T(A)} \circ G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= \beta_{T(T(A)),F(A)}(G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ id_{T(T(A))}) \\
&= \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ \beta_{T(T(A)),F(T(A))}(id_{T(T(A))}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iv))}
\end{aligned}
$$

donc

$$
\mu_A \circ T(\mu_A) = \mu_A \circ \mu_{T(A)} \ .
$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mu_A \circ T(\eta_A) &= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ (G \circ F)(\alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})) \\
&= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ F(\alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= G(\beta_{A,F(A)}(id_{T(A)} \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}))) \\
&= G(\beta_{A,F(A)} \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.21 (i))} \\
&= G(id_{F(A)} \circ F(id_A)) \\
&= T(id_A) \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
\mu_A \circ \eta_{T(A)} &= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ \alpha_{T(A),F(T(A))}(id_{F(T(A))}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (ii))} \\
&= \alpha_{T(A),F(A)}(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ id_{F(T(A))}) \\
&= \alpha_{T(A),F(A)}(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G(id_{F(A)}) \circ id_{T(A)} \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.21 (ii))} \\
&= G(id_{F(A)}) \\
&= G \circ F(id_A) \\
&\quad \text{(car } F \text{ est un foncteur)} \\
&= T(id_A) \ .
\end{aligned}
$$

□

Donc, quand on aura une semi-adjonction entre deux semi-foncteurs et que le semi-adjoint à gauche sera un foncteur, on pourra parler de la *semi-monade induite par cette semi-adjonction*.

Proposition 3.2.24. *Soit (F, G, α, β) une semi-adjonction de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{D}$ telle que G est un foncteur de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{C}$. On pose $T = G \circ F$. Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on pose $\eta_A = \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})$ et $\mu_A = G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}))$. Alors (T, η, μ) est une monade faible dans la catégorie $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour tout $f \in \mathbb{C}[A, A']$, on a

$$
\begin{aligned}
T(f) \circ \eta_A &= G(F(f)) \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}) \\
&= \alpha_{A,F(A')}(F(f) \circ id_{F(A)}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (ii))} \\
&= \alpha_{A,F(A')}(id_{F(A')} \circ F(f)) \\
&= \alpha_{A',F(A')}(id_{F(A')}) \circ f \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (i))} \\
&= \eta_{A'} \circ f \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout $f \in \mathbb{C}[A, A']$, on a

$$
\begin{aligned}
T(f) \circ \mu_A &= G(F(f)) \circ G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= G(F(f) \circ \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= G(\beta_{T(A),F(A')}(G(F(f)) \circ id_{T(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iv))} \\
&= G(\beta_{T(A),F(A')}(id_{T(A')} \circ T(f))) \\
&= G(\beta_{T(A'),F(A')}(id_{T(A')}) \circ F(T(f))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= G(\beta_{T(A'),F(A')}(id_{T(A')})) \circ G(F(T(f))) \\
&= \mu_{A'} \circ (T \circ T(f)) \ .
\end{aligned}
$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$
\begin{aligned}
\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ (F \circ G)(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) &= \beta_{T(T(A)),F(A)}(id_{T(A)} \circ G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= \beta_{T(T(A)),F(A)}(G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ id_{T(T(A))}) \\
&= \beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ \beta_{T(T(A)),F(T(A))}(id_{T(T(A))}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iv))}
\end{aligned}
$$

donc

$$\mu_A \circ T(\mu_A) = \mu_A \circ \mu_{T(A)} \quad .$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_A \circ T(\eta_A) &= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ (G \circ F)(\alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})) \\
&= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ F(\alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}))) \\
&= G(\beta_{A,F(A)}(id_{T(A)} \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)}))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= G(\beta_{A,F(A)} \circ \alpha_{A,F(A)}(id_{F(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.21 (i))} \\
&= G(id_{F(A)} \circ F(id_A)) \\
&= T(id_A) \quad .
\end{aligned}$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_A \circ \eta_{T(A)} &= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ \alpha_{T(A),F(T(A))}(id_{F(T(A))}) \\
&= \alpha_{T(A),F(A)}(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ id_{F(T(A))}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (ii))} \\
&= \alpha_{T(A),F(A)}(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.21 (ii))} \\
&= G(id_{F(A)}) \circ id_{T(A)} \\
&= G(id_{F(A)}) \\
&\quad \text{(car } G \text{ est un foncteur)} \\
&= id_{T(A)} \quad .
\end{aligned}$$

Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu_A \circ T(id_{T(A)}) &= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \circ (G \circ F)(id_{T(A)}) \\
&= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)}) \circ F(id_{T(A)})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.2.22 (iii))} \\
&= G(\beta_{T(A),F(A)}(id_{T(A)})) \\
&= \mu_A \quad .
\end{aligned}$$

□

Donc, quand on aura une semi-adjonction entre deux semi-foncteurs et que le semi-adjoint à droite sera un foncteur, on pourra parler de la *monade faible induite cette semi-adjonction*.

3.2.4 Algèbres pour une monade faible

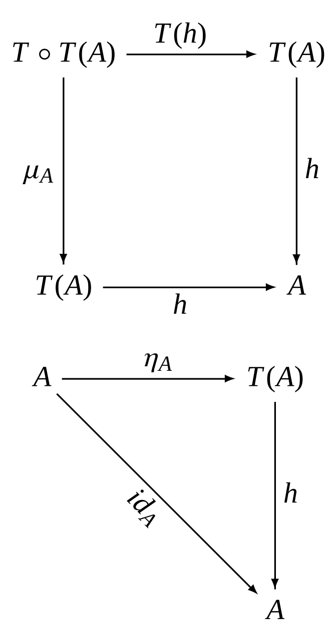
Soit $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ une monade faible dans une catégorie $\mathbb{C}$. On désignera par $\circ_{\mathbb{C}}$ la composition dans la catégorie $\mathbb{C}$.

La catégorie $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$

On généralise la construction d'Eilenberg-Moore pour une monade à celle pour une monade faible.

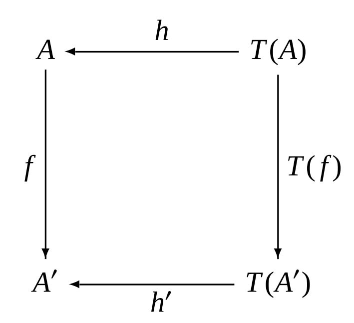
Définition 3.2.25. *Les données suivantes définissent une catégorie $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$:*

– *les objets sont de la forme (A, h), où A est un objet de $\mathbb{C}$ et $h \in \mathbb{C}[T(A), A]$ tel que les diagrammes*



commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$;

– *une flèche de (A, h) vers (A', h') est une flèche f de A vers A' dans $\mathbb{C}$ telle que le diagramme*



commute dans la catégorie $\mathbb{C}$;

– *pour tout objet (A, h), l'identité de (A, h) est id_A ;*

– *la composition est la même que celle dans $\mathbb{C}$.*

On note $F^{\mathbb{T}}$ le semi-foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ qui assigne $(T(A), \mu_A)$ à chaque objet A de $\mathbb{C}$ et $T(f)$ à chaque flèche f dans $\mathbb{C}$.

On note $G^{\mathbb{T}}$ le foncteur de $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ vers $\mathbb{C}$ qui assigne A à chaque objet (A, h) et f à chaque flèche f.

Pour tout $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(A, h'), (B, h)]$, on pose

$$\alpha^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}(f) = f \circ \eta_A \quad .$$

Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, B]$ et pour tout objet (B, h) de $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$, on pose

$$\beta^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}(g) = h \circ T(g) \quad .$$

Proposition 3.2.26. $(F^{\mathbb{T}}, G^{\mathbb{T}}, \alpha^{\mathbb{T}}, \beta^{\mathbb{T}})$ *est une semi-adjonction de* $\mathbb{C}$ *vers* $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que pour tout $g \in \mathbb{C}[A, B]$ et pour tout objet (B, h) de $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xleftarrow{\mu_A} & T \circ T(A) \\ {\scriptstyle h \circ T(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle T(h \circ T(g))} \\ B & \xleftarrow[h]{} & T(B) \end{array}$$

commute dans la catégorie $\mathbb{C}$. Donc $\beta^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}(g) \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(TA, \mu_A), (B, h)]$.

Soient $j \in \mathbb{C}[A', A]$ et $k \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(B, h), (B', h')]$.

Pour tout $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \mu_A), (B, h)]$, on a $k \circ f \circ T(j) \circ \eta_{A'} = k \circ f \circ \eta_A \circ j$ donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \mu_A), (B, h)] & \xrightarrow{\alpha^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}} & \mathbb{C}[A, B] \\ {\scriptstyle k \circ - \circ F^{\mathbb{T}}(j)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G^{\mathbb{T}}(k) \circ - \circ j} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A'), \mu_{A'}), (B', h')] & \xrightarrow[\alpha^{\mathbb{T}}{}_{A',(B',h')}]{} & \mathbb{C}[A', B'] \end{array} \quad .$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, B]$, $k \circ g \circ j = k \circ h \circ T(g) \circ T(j) \circ \eta_{A'}$ donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \mu_A), (B, h)] & \xleftarrow{\beta^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}} & \mathbb{C}[A, B] \\ {\scriptstyle k \circ - \circ F^{\mathbb{T}}(j)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G^{\mathbb{T}}(k) \circ - \circ j} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A'), \mu_{A'}), (B', h')] & \xrightarrow[\alpha^{\mathbb{T}}{}_{A',(B',h')}]{} & \mathbb{C}[A', B'] \end{array} \quad .$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(TA, \mu_A), (B, h)]$, on a $h' \circ T(k \circ f \circ \eta_A \circ j) = k \circ f \circ T(j)$ donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \mu_A), (B, h)] & \xrightarrow{\alpha^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}} & \mathbb{C}[A, B] \\ {\scriptstyle k \circ - \circ F^{\mathbb{T}}(j)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G^{\mathbb{T}}(k) \circ - \circ j} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A'), \mu_{A'}), (B', h')] & \xleftarrow[\beta^{\mathbb{T}}{}_{A',(B',h')}]{} & \mathbb{C}[A', B'] \end{array} \quad .$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $g \in \mathbb{C}[A, B]$, $k \circ h \circ T(g) \circ T(j) = h' \circ T(k \circ g \circ j)$ donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \mu_A), (B, h)] & \xleftarrow{\beta^{\mathbb{T}}{}_{A,(B,h)}} & \mathbb{C}[A, B] \\ {\scriptstyle k \circ - \circ F^{\mathbb{T}}(j)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle G^{\mathbb{T}}(k) \circ - \circ j} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A'), \mu_{A'}), (B', h')] & \xleftarrow[\beta^{\mathbb{T}}{}_{A',(B',h')}]{} & \mathbb{C}[A', B'] \end{array} .$$

commute dans la catégorie **Ens**. □

On remarque que la monade faible induite par la semi-adjonction de la proposition précédente est $\mathbb{T}$.

La catégorie $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$

On généralise la construction de catégorie de Kleisli d'une monade à celle d'une monade faible.

Définition 3.2.27. *Les données suivantes définissent une catégorie $\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$:*
- *les objets sont les mêmes que ceux de $\mathbb{C}$;*
- *une flèche f de A vers B est une flèche de A vers TB dans $\mathbb{C}$ telle que $T(id_B) \circ f = f$;*
- *pour tout objet A, l'identité est η_A ;*
- *pour toute flèche f de A vers B et pour toute flèche g de B vers C, $g \circ_{\mathbb{C}_{\mathbb{T}}} f = \mu_C \circ T(g) \circ f$.*

Hoofman, dans [30], généralise les catégories de Kleisli aux semi-monades : étant donnée une monade faible $\mathbb{T}$, sa catégorie de Kleisli coïncide avec la catégorie de Kleisli de la semi-monade induite par la monade faible $\mathbb{T}$.

3.2.5 Semi-foncteurs monoïdaux et monades faibles monoïdales

Avant de donner la définition de *monade faible monoïdale*, on donne celles de *semi-foncteur monoïdal entre deux catégories monoïdales* et de *transformation naturelle monoïdale entre semi-foncteurs monoïdaux*.

Semi-foncteurs monoïdaux

La notion de *semi-foncteur monoïdal* entre deux catégories monoïdales généralise celle de *foncteur monoïdal*.

Définition 3.2.28. *Un semi-foncteur monoïdal $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ d'une catégorie monoïdale $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ vers une catégorie monoïdale $(\mathbb{C}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho')$ est un triplet consistant en un semi-foncteur F de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$, une transformation naturelle normale m de $\otimes' \circ (F \times F)$ vers $F \circ \otimes$ et une flèche n dans $\mathbb{C}'$ de I' vers $F(I)$ tels que les quatre diagrammes*

$$\begin{array}{ccc}
F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) & \xrightarrow{\alpha'_{F(A),F(B),F(C)}} & (F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) \\
\downarrow{\scriptstyle id_{F(A)} \otimes m_{B,C}} & & \downarrow{\scriptstyle m_{A,B} \otimes id_{F(C)}} \\
F(A) \otimes' (F(B \otimes C)) & & (F(A \otimes B) \otimes' F(C)) \\
\downarrow{\scriptstyle m_{A,B\otimes C}} & & \downarrow{\scriptstyle m_{A\otimes B,C}} \\
F(A \otimes (B \otimes C)) & \xrightarrow[F(\alpha_{A,B,C})]{} & F((A \otimes B) \otimes C)
\end{array} \qquad (1)$$

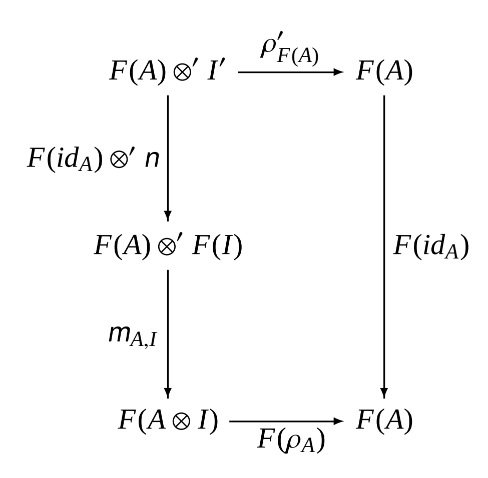
$$\begin{array}{ccc}
F(A) \otimes' I' & \xrightarrow{\rho'_{F(A)}} & F(A) \\
\downarrow{\scriptstyle id_{F(A)} \otimes' n} & & \\
F(A) \otimes' F(I) & & \downarrow{\scriptstyle F(id_A)} \\
\downarrow{\scriptstyle m_{A,I}} & & \\
F(A \otimes I) & \xrightarrow[F(\rho_A)]{} & F(A)
\end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xleftarrow{\lambda'_{F(A)}} & I' \otimes' F(A) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle n \otimes' id_{F(A)}} \\
\downarrow{\scriptstyle F(id_A)} & & F(I) \otimes' F(A) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle m_{I,A}} \\
F(A) & \xleftarrow[F(\lambda_A)]{} & F(A \otimes I)
\end{array} \qquad (3)$$

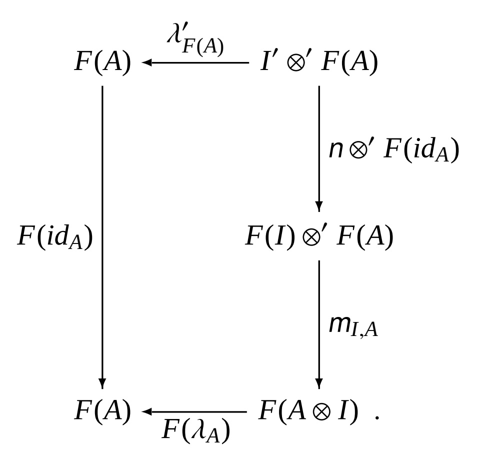
$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{n} & F(I) \\
 & \searrow{\scriptstyle n} & \uparrow{\scriptstyle F(id_I)} \\
 & & F(I)
\end{array} \qquad (4)$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}'$.

Remarque 3.2.29. *Du fait de la normalité de* m*, les diagrammes (2) et (3) sont respectivement équivalents aux deux diagrammes*



et

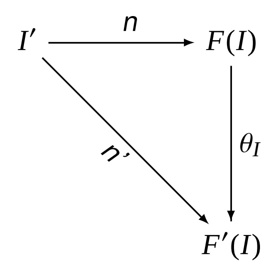


La définition de *transformation naturelle monoïdale* entre deux semi-foncteurs monoïdaux généralise celle entre deux foncteurs monoïdaux.

Définition 3.2.30. *Soient* (F, m, n) *et* (F', m', n') *deux semi-foncteurs monoïdaux d'une catégorie monoïdale* $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ *vers une catégorie monoïdale* $(\mathbb{C}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho')$*. Une transformation naturelle monoïdale* θ *de* (F, m, n) *vers* (F', m', n') *est une transformation naturelle de* F *vers* F' *telle que, pour tous objets* A *et* B *de* $\mathbb{C}$*, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes F(B) & \xrightarrow{m_{A,B}} & F(A \otimes B) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_A \otimes \theta_B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_{A \otimes B}} \\ F'(A) \otimes F'(B) & \xrightarrow[m'_{A,B}]{} & F'(A \otimes B) \end{array}$$

et le diagramme



commutent dans la catégorie $\mathbb{C}'$.

Pour toute catégorie monoïdale C, on définit une catégorie $\mathbf{1/2End}(C)$:
- les objets sont les semi-foncteurs monoïdaux de C vers C ;
- une flèche de $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $(F', \mathsf{m'}, \mathsf{n'})$ est une transformation naturelle monoïdale de $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $(F', \mathsf{m'}, \mathsf{n'})$;
- l'identité de $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ est id_F ;
- la composition est $\bullet$.

Monades faibles monoïdales

Définition 3.2.31. *Une monade faible monoïdale dans une catégorie monoïdale C est un monoïde dans la catégorie semi-monoïdale stricte $(\mathbf{1/2End}(C), \circ, id_C)$.*

La proposition suivante donne une caractérisation des monades faibles monoïdales dans une catégorie monoïdale C.

Proposition 3.2.32. *$((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \mu, \eta)$ est une monade faible monoïdale dans une catégorie monoïdale $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ si, et seulement si,*
- *(T, μ, η) est une monade faible dans la catégorie $\mathbb{C}$;*
- *$(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ est un semi-foncteur monoïdal de C vers C ;*
- *μ est une transformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n}) \circ (T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$;*
- *et η est une transformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers id_C.*

Démonstration. Simple vérification. □

Exemple 3.2.33. *Soit (T, δ, d) la comonade faible de l'Exemple 3.2.15.*
- *Pour tous objets A et B de **Rel**, on pose*

$$\mathsf{m}_{A,B} = \{(((\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle, \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle), \langle(\alpha_{\sigma(1)}, \beta_{\tau(1)}), \ldots, (\alpha_{\sigma(n)}, \beta_{\tau(n)})\rangle) \; ; \; \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n\} \; .$$

- *On pose* $\mathsf{n} = \{(*, \langle\underbrace{*, \ldots, *}_{n \text{ fois}}\rangle) \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$.

*$((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \mu, \eta)$ est une comonade faible monoïdale dans la catégorie monoïdale $\mathcal{R} = ($**Rel**, $\otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$, où $\otimes$ est le produit cartésien ensembliste et I est le singleton $\{*\}$.*

Monades faibles monoïdales symétriques

Maintenant que l'on sait ce qu'est un semi-foncteur monoïdal entre deux catégories monoïdales, la définition de semi-foncteur monoïdal symétrique ne pose aucune difficulté.

Définition 3.2.34. *Soient* $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *et* $\mathbb{C}' = (\mathbb{C}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho', \gamma')$ *deux catégories monoïdales symétriques. Un semi-foncteur monoïdal symétrique de* C *vers* C' *est un triplet* $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *tel que :*

(i) $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *est un semi-foncteur monoïdal de* C *vers* C' *;*

(ii) de plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(A) \otimes' F(B) & \xrightarrow{\gamma'_{F(A),F(B)}} & F(B) \otimes' F(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{B,A}} \\ F(A \otimes B) & \xrightarrow[F(\gamma_{A,B})]{} & F(B \otimes A) \end{array}$$

commute dans la catégorie $\mathbb{C}'$.

Un long calcul montre permet de montrer le fait suivant.

Fait 3.2.35. *Si l'on a un semi-foncteur monoïdal symétrique* $(F, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *de* $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *vers* $(\mathbb{C}', \otimes', I', \alpha', \lambda', \rho', \gamma')$*, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (T(A) \otimes' T(A)) \otimes' (T(B) \otimes T(B)) & \xrightarrow{\sim'_{T(A),T(B)}} & (T(A) \otimes' T(B)) \otimes' (T(A) \otimes' T(B)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A,A} \otimes' \mathsf{m}_{B,B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A,B} \otimes' \mathsf{m}_{A,B}} \\ T(A \otimes A) \otimes' T(B \otimes B) & & T(A \otimes B) \otimes' T(A \otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A \otimes A, B \otimes B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A \otimes B, A \otimes B}} \\ T((A \otimes A) \otimes (B \otimes B)) & \xrightarrow[T(\sim_{A,B})]{} & T((A \otimes B) \otimes (A \otimes B)) \end{array}$$

commute dans la catégorie $\mathbb{C}'$.

Définition 3.2.36. *Une* monade faible monoïdale symétrique *dans une catégorie monoïdale symétrique* $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *est une monade faible monoïdale* $((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \mu, \eta)$ *dans la catégorie monoïdale* $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ *telle que* $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *est un semi-foncteur monoïdal symétrique de* C *vers* C.

Exemple 3.2.37. *La catégorie monoïdale* $\mathcal{R} = (\textbf{Rel}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ *se prolonge naturellement en une catégorie monoïdale symétrique* $(\textbf{Rel}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *que l'on notera encore* $\mathcal{R}$*. Alors la comonade faible monoïdale de l'Exemple 3.2.33 est une comonade faible monoïdale symétrique dans la catégorie monoïdale symétrique* $\mathcal{R}$.

3.3 Interpréter la logique linéaire et le lambda-calcul

3.3.1 Le fragment multiplicatif exponentiel

Nous allons maintenant pouvoir donner notre définition de *modèle de IMELL*. Afin de distinguer les deux définitions, celle de [9] rappelée au début du chapitre et la Définition 3.3.2 donnée ci-dessous,

nous modifions la terminologie en appelant la première "modèle extensionnel de IMELL". En fait, nous allons plutôt considérer une autre définition de *modèle extensionnel de IMELL,* bien entendu équivalente à la première, afin de mieux comparer les définitions de *modèle extensionnel de IMELL* et de *modèle de IMELL*.

Définition 3.3.1. *Un* modèle extensionnel de IMELL *est un quadruplet* $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, c, w)$ *tel que :*

- $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *est une catégorie monoïdale symétrique fermée ;*
- $\mathcal{L} = ((T, m, n), \delta, d)$ *est une comonade monoïdale symétrique dans* $\mathcal{C}$ *;*
- *c est une transformation naturelle monoïdale de* (T, m, n) *vers* $\otimes \circ \Delta_{\mathcal{C}} \circ (T, m, n)$ *et w est une transformation naturelle monoïdale de* (T, m, n) *vers* $*_{\mathcal{C}}$ *telles que*
  - *pour tout objet A de* $\mathbb{C}$*,* $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ *est un comonoïde cocommutatif dans* $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
  - *et pour tout objet A de* $\mathbb{C}$*,* δ_A *est un morphisme de comonoïdes de* $((T(A), \delta_A), c_A, w_A)$ *vers* $((T(T(A)), \delta_{T(A)}), c_{T(A)}, w_{T(A)})$,

  où $\mathbb{T}$ *est la comonade* (T, δ, d) *dans* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ *est la catégorie des* $\mathbb{T}$*-cogèbres.*

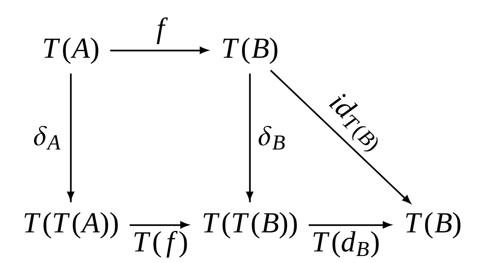
On a seulement remplacé

pour tout $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{T}}[(T(A), \delta_A), (T(B), \delta_B)]$, f est un morphisme de comonoïdes

par

pour tout objet A de $\mathbb{C}$, δ_A est un morphisme de comonoïdes de $((T(A), \delta_A), c_A, w_A)$ vers $((T(T(A)), \delta_{T(A)}), c_{T(A)}, w_{T(A)})$.

En effet, étant donné un modèle extensionnel comme dans la Définition 3.3.1,si f est une flèche de $(T(A), \delta_A)$ vers $(T(B), \delta_B)$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$, alors les deux diagrammes



et

$$\begin{array}{ccccccc}
T(A) & \xrightarrow{\delta_A} & T(T(A)) & \xrightarrow{T(f)} & T(T(B)) & \xrightarrow{T(d_B)} & T(B) \\
\downarrow c_A & & \downarrow c_{T(A)} & & \downarrow c_{T(B)} & & \downarrow c_B \\
T(A) \otimes T(A) & \xrightarrow[\delta_A \otimes \delta_A]{} & T(T(A)) \otimes T(T(A)) & \xrightarrow[T(f) \otimes T(F)]{} & T(T(B)) \otimes T(T(B)) & \xrightarrow[T(d_B) \otimes T(d_B)]{} & T(B) \otimes T(B)
\end{array}$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Définition 3.3.2. *Un* modèle de IMELL *est un quadruplet* $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, c, w)$ *tel que :*

- $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ *est une catégorie monoïdale symétrique fermée ;*
- $\mathcal{L} = ((T, m, n), \delta, d)$ *est une comonade* faible *monoïdale symétrique dans* $\mathcal{C}$ *;*
- *c est une transformation naturelle monoïdale de* (T, m, n) *vers* $\otimes \circ \Delta_{\mathcal{C}} \circ (T, m, n)$ *et w est une transformation naturelle monoïdale de* (T, m, n) *vers* $*_{\mathcal{C}}$ *telles que*

– *pour tout objet A de* $\mathbb{C}$, $((T(A), \delta_A), c_A, w_A)$ *est un comonoïde cocommutatif dans* $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, n), \alpha, \lambda, \rho)$
– *et pour tout objet A de* $\mathbb{C}$, δ_A *est un morphisme de comonoïdes de* $(T(A), \delta_A)$ *vers* $(T(T(A)), \delta_{T(A)})$,

où $\mathbb{T}$ *est la comonade faible* (T, δ, d) *dans* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ *est la catégorie définie dans la Sous-Section 3.2.4*

Comparons les deux définitions : on a juste remplacé "comonade monoïdale symétrique" par "comonade *faible* monoïdale symétrique".

Donnons un exemple d'un modèle de IMELL, qui *n'est pas* un modèle extensionnel.

Exemple 3.3.3. *Soit* $((T, m, n), \delta, d)$ *la comonade faible monoïdale de l'Exemple 3.2.37.*
– *Pour tout objet A de* ***Rel***, *on pose*

$$c_A = \{(a, (a_1, a_2)) \; ; \; a_1, a_2 \in A^{<\omega} \text{ et } a \in \mathfrak{S}(a_1, a_2)\} \; .$$

– *Pour tout objet A de* ***Rel***, *on pose*

$$w_A = \{(\langle\rangle, *)\} \; .$$

$(\mathcal{R}, ((T, m, n), \delta, d), (c_A)_{A \in ob(\mathbf{Rel})}, (w_A)_{A \in ob(\mathbf{Rel})})$ *est un modèle de IMELL.*

Interpréter les preuves en calcul des séquents ne pose aucune difficulté, on peut faire comme d'habitude, c'est-à-dire qu'à une preuve π de $A_1, \ldots, A_n \vdash A$ on associe une flèche de $[\![A_1 \otimes \ldots \otimes A_n]\!]$ vers $[\![A]\!]$. L'interprétation se fait par induction sur la preuve π. Bien entendu, dans le cas où l'on a

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{cc} \pi_0 & \pi_1 \\ A_1, \ldots, A_m \vdash A & B_1, \ldots, B_n, A \vdash C \end{array}}{B_1, \ldots, B_n, A_1, \ldots, A_m \vdash C} \; ,$$

avec $n = 0$, on aura $[\![\pi]\!] = [\![\pi_1]\!] \circ [\![\pi_0]\!]$. Dans le cas où $n \neq 0$, on utilise le fait que pour tout objet B de $\mathbb{C}$, il existe une adjonction $(- \otimes B, B \multimap -, \xi^B)$. En effet, dans le cas où $n = 0$, on peut remarquer que l'on a $[\![\pi_1]\!] \circ [\![\pi_0]\!] = \epsilon_{C,A} \circ (\xi^A_{I,C}([\![\pi_1]\!] \circ \lambda_A) \otimes [\![\pi_0]\!]) \circ \lambda_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}{}^{-1}$. Dans le cas où $n \neq 0$, on pose donc

$$[\![\pi]\!] = \epsilon_{C,A} \circ (\xi^A_{\bigotimes_{i=1}^n B_i, C}([\![\pi_1]\!]) \otimes [\![\pi_0]\!]) \; .$$

L'analyse de la sous-section précédente devrait avoir convaincu le lecteur que l'interprétation d'une preuve sera invariante au cours de la réduction. La preuve se fait par une longue et pénible induction.

Quelques commentaires :

– Il est bien connu que pour passer du fragment intuitionniste au cas classique, il suffit d'avoir une catégorie $*$-autonome au lieu d'une catégorie monoïdale symétrique fermée.
– L'axiomatique que l'on a donnée ne capture pas des modèles qui ne respecteraient pas êta au niveau de MLL : le lecteur a déjà compris que s'il voulait donner une telle axiomatique, il devrait remplacer le foncteur $\otimes$ par un semi-foncteur...
– Comme on l'a déjà suggéré, on pourrait aussi avoir une axiomatique plus faible si l'on ne voulait considérer que des réseaux êta-expansés : c'est alors une semi-comonade au lieu d'une comonade faible que l'on devrait avoir. On a aussi vu que, d'un point de vue catégorique, la notion de semi-monade ne pose aucune difficulté, alors que celle de monade faible est assez curieuse, car, pour l'instant, on ne voit pas comment la faire rentrer dans une théorie générale des monades (contrairement à la notion de semi-monade). Ce sont les réseaux de la logique

linéaire, les réseaux différentiels, le modèle que l'on vient de donner en exemple et des considérations catégoriques formelles qui ont donné naissance à (et justifient) cette curieuse notion de monade faible et non de pures considérations catégoriques formelles (qui, elles, suggèrent plutôt la notion de semi-monade). Le fait que les réseaux disent que la contraction et le digging sont des transformations naturelles non normales est troublant d'un point de vue catégorique...
– On peut se demander s'il n'y aurait pas une axiomatique à la Benton (voir [8]) équivalente à celle que l'on a donnée ici. Il est raisonnable de penser que si l'on demande une semi-adjonction monoïdale symétrique normale entre une catégorie monoïdale symétrique et une catégorie cartésienne faible (on n'explicitera pas ici ce que devrait être une *semi-adjonction monoïdale symétrique normale*, mais le lecteur trouvera par contre une présentation des catégories cartésiennes fermées faibles dans la sous-section suivante - en fait, il revient peut-être au même de demander seulement que la catégorie soit cartésienne), on obtiendra quelque chose de trop faible : une semi-comonade monoïdale symétrique avec une contraction normale, etc... Mais on peut conjecturer que notre axiomatique est équivalente à la donnée d'une semi-adjonction monoïdale symétrique normale entre une catégorie monoïdale symétrique et une catégorie cartésienne, adjonction dont on demande, en plus, que le semi-foncteur gauche est un foncteur.

3.3.2 Une interprétation du lambda-calcul simplement typé

On prétend qu'étant donné un modèle $\mathfrak{M}$ de IMELL, on peut construire une sémantique du lambda-calcul simplement typé en s'inspirant de la traduction de Girard de la logique intuitionniste dans IMELL, traduction qui peut être résumée par le slogan : $A \Rightarrow B = !A \multimap B$. On va donc construire une catégorie, que l'on notera $\Lambda(\mathfrak{M})$, et exhiber sur cette catégorie une certaine structure catégorique permettant de donner une interprétation du lambda-calcul invariante par β-réduction. Cette structure catégorique sera une structure de *catégorie cartésienne fermée faible*. Cette notion, introduite par Martini dans [41], est une variante de la notion de *semi-catégorie cartésienne fermée* introduite par Hayashi dans [29]. Plus précisément, les deux notions sont des affaiblissements de la notion de *catégorie cartésienne fermée*, celle de *catégorie cartésienne fermée faible* étant plus forte que celle de *semi-catégorie cartésienne fermée*, car elle admet un produit cartésien.

Définition 3.3.4 ([41]). *Une catégorie $\mathbb{K}$ est une* catégorie cartésienne fermée faible *si, et seulement, si*

(i) elle est cartésienne (i.e. elle a un objet terminal 1 et un produit cartésien $\&$) ;

(ii) pour tout objet A de $\mathbb{K}$, le foncteur $-\&A$ a un semi-adjoint à droite.

Une catégorie cartésienne fermée faible est une catégorie sur laquelle il existe une *une structure cartésienne fermée faible*.

Définition 3.3.5. *Une* structure cartésienne fermée faible *est un 10-uplet* $(\mathbb{C}, 1, !, \times, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, \Rightarrow, \Lambda, ev)$ *tel que*
– $(\mathbb{C}, 1, !, \times, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *est une structure cartésienne ;*
– *pour tous objets A et B, $A \Rightarrow B$ est un objet de $\mathbb{C}$;*
– *pour toute flèche f de $A \times B$ vers C, $\Lambda(f)$ est une flèche de A vers $B \Rightarrow C$;*
– *$ev = (ev_{A,B})_{A,B \in \mathbb{C}}$ est une flèche de $(B \Rightarrow A) \times B$ vers A ;*
– *pour toute flèche h de $C \times B$ vers A, $ev_{A,B} \circ \langle \Lambda(h) \circ \pi^1{}_{C,B}, \pi^2{}_{C,B}\rangle = h$;*
– *pour toute flèche h de D vers A, pour toute flèche g de $A \times B$ vers C, on a $\Lambda(g \circ \langle h \circ \pi^1{}_{A,B}, \pi^2{}_{A,B}\rangle) = \Lambda(g) \circ h$.*

Autrement dit, une structure cartésienne fermée faible est une structure cartésienne fermée sauf que l'on n'a pas nécessairement

$$\Lambda(\mathrm{ev}_{A,B} \circ \langle k \circ \pi^1{}_{C,B}, \pi^2{}_{C,B}\rangle) = k \ .$$

On n'aura donc pas nécessairement un isomorphisme entre $\mathbb{C}[A \times B, C]$ et $\mathbb{C}[A, B \Rightarrow C]$, mais on aura une rétraction

$$\mathbb{C}[A \times B, C] \lhd \mathbb{C}[A, B \Rightarrow C] \ .$$

Au lieu que l'objet $A \Rightarrow B$ représente exactement les flèches de A vers B, $A \Rightarrow B$ peut avoir plusieurs points qui représentent la même flèche.

Contrairement aux structures cartésiennes fermées, il peut y avoir plusieurs structures carésiennes fermées faibles non isomorphes sur la même catégorie.

Dans cette sous-section, on suppose que $\mathfrak{M} = (C, \mathcal{L}, c, w)$ est un modèle de IMELL, avec $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ et $\mathcal{L} = ((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d)$.

La catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$

Définition 3.3.6. *Pour tout entier n, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on définit, par récurrence sur n, $c_A^n \in \mathbb{C}[T(A), \bigotimes_{i=1}^n T(A)]$:*
- *si $n = 0$, alors $c_A^n = w_A$;*
- *si $n = 1$, alors $c_A^n = id_{T(A)}$;*
- *si $n \geq 1$, alors $c_A^{n+1} = (c_A^n \otimes id_{T(A)}) \circ c_A$.*

Remarque 3.3.7. *Pour tout entier n, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a $can^n \circ \bigotimes_{i=1}^n w_A \circ c_A^n = w_A$.*

Définition 3.3.8. *Pour tout entier m, pour tous objets $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur m, $\mathsf{m}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m TA_j, T \bigotimes_{j=1}^m A_j]$:*
- *si $m = 0$, $\mathsf{m}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} = \mathsf{n}$;*
- *si $m = 1$, $\mathsf{m}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} = T(id_{A_1})$;*
- *$\mathsf{m}_{\langle A_1,\ldots,A_{m+1}\rangle} = \mathsf{m}_{\bigotimes_{j=1}^m A_j, A_{m+1}} \circ (\mathsf{m}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \otimes T(id_{A_{m+1}}))$.*

Fait 3.3.9. *Pour tout entier $q \geq 1$, pour tous objets $C_1, \ldots, C_q$ de $\mathbb{C}$, on a*

$$\begin{aligned} & T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^q C_k}) \circ \mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q,I\rangle} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^q T(C_k)} \otimes \mathsf{n}) \\ = \quad & \mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q\rangle} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(C_k)} \ . \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^q C_k}) \circ \mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q,I\rangle} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^q T(C_k)} \otimes \mathsf{n}) \\ = \quad & T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^q C_k}) \circ \mathsf{m} \bigotimes_{k=1}^q C_k, I \circ (id_{T(\bigotimes_{k=1}^q C_k)} \otimes \mathsf{n}) \circ (\mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q\rangle} \otimes id_I) \\ = \quad & T(id_{\bigotimes_{k=1}^q C_k}) \circ \rho_{T(\bigotimes_{k=1}^q C_k)} \circ (\mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q\rangle} \otimes id_I) \\ & \text{(car } (T, \mathsf{m}, \mathsf{n}) \text{ est monoïdal)} \\ = \quad & T(id_{\bigotimes_{k=1}^q C_k}) \circ \mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q\rangle} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(C_k)} \\ & \text{(par naturalité de } \rho) \\ = \quad & \mathsf{m}_{\langle C_1,\ldots,C_q\rangle} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(C_k)} \\ & \text{(par normalité de } \mathsf{m}). \end{aligned}$$

□

Définition 3.3.10. *Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq n$ et pour tous objets $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, $d^{i_0}_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \in \mathbb{C}[\bigotimes_{i=1}^n TA_i, A_{i_0}]$:*
- $d^1_{\langle A_1\rangle} = d_{A_1}$;
- *pour* $i_0 \leq n$, $d^{i_0}_{\langle A_1,\ldots,A_{n+1}\rangle} = d^{i_0}_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \circ \rho_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ (\bigotimes_{i=1}^n id_{TA_i} \otimes w_{A_{n+1}})$;
- $d^{n+1}_{\langle A_1,\ldots,A_{n+1}\rangle} = \lambda_{A_{n+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{i=1}^n T(A_i)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}) \otimes d_{A_{n+1}})$.

Remarque 3.3.11. *Soit n un entier non nul. Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i est une flèche de A_i vers B_i, alors on a*

$$d^{i_0}_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n T(f_i) = f_{i_0} \circ d^{i_0}_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle} \quad .$$

On veut montrer que les données suivantes définissent bien une catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$:
- un objet de $\Lambda(\mathfrak{M})$ est un élément de la forme $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$, où m est un entier quelconque et $A_1, \ldots, A_m$ sont des objets de $\mathbb{C}$;
- une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ est un élément de la forme $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$, où $f_i \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), B_i]$ tel que $f_i \circ \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) = f_i$;
- l'identité de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ est $\langle d^1_{A_1,\ldots,A_m}, \ldots, d^m_{A_1,\ldots,A_m}\rangle$;
- si f est une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ et $g = \langle g_1, \ldots, g_p\rangle$ est une flèche de $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ vers $\langle C_1, \ldots, C_p\rangle$, alors $g \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} f = \langle h_1, \ldots, h_p\rangle$ avec

$$h_k = g \circ \bigotimes_{i=1}^n T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \quad .$$

Pour l'instant, on sait que la donnée des objets et des flèches déterminent un graphe, que l'on notera encore $\Lambda(\mathfrak{M})$. Il faut vérifier que la donnée de la composition et des identités fournit bien une catégorie.

Définition 3.3.12. *Pour tous objets $A = \langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ et $B = \langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour toute flèche $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de A vers B dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour toute flèche g de $\bigotimes_{i=1}^n T(A_i)$ vers B dans $\mathbb{C}$, on pose*

$$g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle = g \circ \bigotimes_{i=1}^n T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \quad .$$

Remarque 3.3.13. *Pour toute flèche $f = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour tout $g \in \mathbb{C}[\bigotimes_{i=1}^n TB_i, C]$, on a*

$$g \circ_{\mathfrak{M}} f = (g \circ \bigotimes_{i=1}^n T(id_{B_i})) \circ_{\mathfrak{M}} f \quad .$$

Le lemme suivant montre que si f est une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$ et si g est une flèche de $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ vers $\langle C_1, \ldots, C_p\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, alors $g \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} f$ est une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle C_1, \ldots, C_p\rangle$.

Lemme 3.3.14. *Pour tous objets $A = \langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ et $B = \langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour toute flèche $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de A vers B dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour toute flèche g de $\bigotimes_{i=1}^n T(A_i)$ vers B dans $\mathbb{C}$, on a*

$$g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle = (g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle) \circ \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) \quad .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
& g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \\
= \; & g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1 \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}), \ldots, f_n \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \rangle \\
= \; & g \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par définition de } \circ_{\mathfrak{M}}) \\
= \; & g \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \; & g \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } c^n) \\
= \; & g \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(T(id_{A_j})) \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } \mathsf{m}) \\
= \; & g \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \\
& \text{(par naturalité de } \delta) \\
= \; & (g \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n \rangle) \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \\
& \text{(par définition de } \circ_{\mathfrak{M}}) \; .
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant montre l'associativité de $\circ_{\Lambda(\mathfrak{M})}$.

Lemme 3.3.15. *Soient $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ une flèche de $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, $g = \langle g_1, \ldots, g_p \rangle$ une flèche de $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ vers $\langle C_1, \ldots, C_p \rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$ et $h = \langle g_1, \ldots, g_q \rangle$ une flèche de $\langle C_1, \ldots, C_p \rangle$ vers $\langle D_1, \ldots, D_q \rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, q\}$, on a*

$$\begin{aligned}
& h_k \circ_{\mathfrak{M}} \langle g_1 \circ_{\mathfrak{M}} f, \ldots, g_p \circ_{\mathfrak{M}} f \rangle \\
= \; & h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j \circ_{\mathfrak{M}} f) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \; & h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \\
& \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}
\end{aligned}$$

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j})$$
$$\circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de c^p)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}) \circ T(m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle})$$
$$\circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(\delta_{A_j}) \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de m)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}) \circ T(m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle})$$
$$\circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{T(A_j)} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(car (T, δ, d) est une comonade faible)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)})$$
$$\circ \delta_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par monoïdalité de δ)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i)) \circ m_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j), \ldots, \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\rangle}_{n \text{ fois}}}$$
$$\circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ c^n_{T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j))} \circ \delta_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(car $c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}$ est un morphisme de cogèbres)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(T(f_i)) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}$$
$$\circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de m)

$$= \quad h_k \circ \bigotimes_{j=1}^{p} T(g_j) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(A_i)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(f_j) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}$$
$$\circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de δ)

$$= \quad (h_k \circ_{\mathfrak{M}} g) \circ_{\mathfrak{M}} f \ .$$

La preuve du lemme suivant est donnée en annexe.

Lemme 3.3.16. *Pour tout entier $q \geq 1$, on a*

$$(T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^q TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}))$$
$$\otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})))$$
$$\circ c_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}$$
$$= \quad (m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes T(id_{B_{q+1}}) \ .$$

Lemme 3.3.17. *Pour tout objet $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})$, on a*

$$d_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} = \bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \ .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} d_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} &= \bigotimes_{j=1}^{m} d_{T(A_j)} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\ &\quad \text{(car } d \text{ est monoïdale)} \\ &= \bigotimes_{j=1}^{m} (d_{T(A_j)} \circ \delta_{A_j}) \\ &= \bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \\ &\quad \text{(car } (T,\delta,d) \text{ est une comonade faible).} \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.18. *Pour tout entier $n \geq 1$, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$d^i_{\underbrace{A,\ldots,A}_{n\ fois}} \circ c^n_A = d_A \ .$$

Démonstration. Par récurrence sur n. □

Enfin, les deux lemmes qui suivent montrent que $\langle d^1_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}, \ldots, d^m_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}\rangle$ est neutre pour la composition $\circ_{\Lambda(\mathfrak{M})}$.

Lemme 3.3.19. *Pour tout* $f \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), B]$, *on a*

$$f \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^1_{A_1,\ldots,A_m}, \ldots, d^m_{A_1,\ldots,A_m}\rangle = f \circ \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) \ .$$

Démonstration. On montre par récurrence sur m que l'on a

$$\bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \quad = \quad \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) \ .$$

Si $m = 0$, on a

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\ = \ & id_I \circ w_I \circ \mathsf{n} \circ id_I \\ = \ & id_I \\ & \text{(par monoïdalité de } w) \\ = \ & \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) \ . \end{aligned}$$

Si $m = 1$, on a

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\ = \ & T(d_{A_1}) \circ id_{T(T(A_1))} \circ T(id_{T(A_1)}) \circ \delta_{A_1} \\ = \ & T(id_{A_1}) \\ & \text{(car } (T, \delta, d) \text{ est une comonade faible)} \\ = \ & \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) \ . \end{aligned}$$

Supposons le lemme démontré pour un certain entier $m \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} & \bigotimes_{j=1}^{m+1} T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_{m+1}\rangle}) \circ c^{m+1}_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_{m+1})\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j} \\ = \ & (\bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_{m+1}\rangle}) \otimes T(d^{m+1}_{\langle A_1,\ldots,A_{m+1}\rangle})) \circ (c^m_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} T(A_j)} \otimes id_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} T(A_j)}) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} T(A_j)} \\ & \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_{m+1})\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j} \end{aligned}$$

$$= \quad ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \otimes w_{A_{m+1}})))$$

$$\otimes (T(\lambda_{A_{m+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \otimes d_{A_{m+1}}))))$$

$$\circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_{m+1})\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de c^m)

$$= \quad (\bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \otimes T(id_{A_{m+1}})$$

(par le Lemme 3.3.16)

$$= \quad \bigotimes_{j=1}^{m+1} T(id_{A_j})$$

(par hypothèse d'induction).

□

Lemme 3.3.20. *Soit n un entier non nul et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Pour toute flèche $\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ de $\langle A_1, \dots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \dots, B_n\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, on a*

$$d^{k}_{B_1,\dots,B_n} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \dots, f_n\rangle = f_k \ .$$

Démonstration. Par induction sur n :

– si $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
d^{k}_{B_1,\dots,\,B_n} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \dots, f_n\rangle &= d^{1}_{B_1} \circ T(f_1) \circ c^{1}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\dots,\,TA_m} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&= d_{B_1} \circ T(f_1) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&= f_1 \circ d_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}
\end{aligned}$$

(par naturalité de d)

$$= \quad f_1$$

(par le Lemme 3.3.17)

$$= \quad f_k \ ;$$

– Si $1 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
&d^{k}_{B_1,\dots,\,B_{n+1}} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \dots, f_{n+1}\rangle \\
= \ &d^{k}_{B_1,\dots,B_n} \circ \rho_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^{n}_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}) \otimes (w_{B_{n+1}} \circ T(f_{n+1})) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \\
= \ &d^{k}_{B_1,\dots,B_n} \circ \rho_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^{n}_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}) \otimes w_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}
\end{aligned}$$

$$\circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de w)

$$= d^k_{B_1,\ldots,B_n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(car $(T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)), c_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}, w_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)})$ est un comonoïde dans $\mathcal{C}$)

$$= f_k \circ d^k_{\underbrace{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j), \ldots, \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}_{n \text{ fois}}} \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

$$= f_k$$

(par les Lemmes 3.3.18 et 3.3.17).

– Si $k = n + 1$, on a

$$d^k_{B_1,\ldots,B_{n+1}} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle = \lambda_{B_{n+1}} \circ (w_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \otimes (d_{B_{n+1}} \circ T(f_{n+1})))$$

$$\circ c_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par la Remarque 3.3.7)

$$= d_{B_{n+1}} \circ T(f_{n+1}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

($(T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)), c_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}, w_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)})$ est un comonoïde dans $\mathcal{C}$)

$$= f_{n+1} \circ d_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par naturalité de d)

$$= f_{n+1}$$

(par le Lemme 3.3.17)

$$= f_k \ .$$

□

La catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ est donc bien définie.

Fait 3.3.21. *Pour tout entier m, pour tous objets $A_1, \ldots, A_m$ de $\mathbb{C}$, on a*

$$\delta_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

$$= T(m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ T(\bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \circ m_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \ .$$

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
& \delta_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
= \quad & T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(T(A_1)),\ldots,T(T(A_m))\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{T(A_j)} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
& \text{(par monoïdalité de } \delta) \\
= \quad & T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(T(A_1)),\ldots,T(T(A_m))\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m (\delta_{T(A_j)} \circ \delta_{A_j}) \\
= \quad & T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(T(A_1)),\ldots,T(T(A_m))\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m (T(\delta_{A_j}) \circ \delta_{A_j}) \\
& \text{(car } (T, \delta, d) \text{ est une comonade faible)} \\
= \quad & T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(T(A_1)),\ldots,T(T(A_m))\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m T(\delta_{A_j}) \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
= \quad & T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ T(\bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } \mathsf{m}).
\end{aligned}
$$

□

Lemme 3.3.22. *Soient*

– $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \ldots, A_m\rangle, \langle B_1, \ldots, B_n\rangle]$
– *et* $\langle g_1, \ldots, g_p\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle B_1, \ldots, B_n\rangle, \langle C_1, \ldots, C_p\rangle]$.

On a

$$
\begin{aligned}
& id_{\bigotimes_{k=1}^p T(C_k)} \circ_{\mathfrak{M}} (\langle g_1, \ldots, g_p\rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle) \\
= \quad & (id_{\bigotimes_{k=1}^p T(C_k)} \circ_{\mathfrak{M}} \langle g_1, \ldots, g_p\rangle) \circ (id_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle) \ .
\end{aligned}
$$

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
& (id_{\bigotimes_{k=1}^p T(C_k)} \circ_{\mathfrak{M}} \langle g_1, \ldots, g_p\rangle) \circ (id_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle) \\
= \quad & \bigotimes_{k=1}^p T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{B_i} \\
& \circ \bigotimes_{i=1}^n T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
= \quad & \bigotimes_{k=1}^p T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n T(T(f_i)) \\
& \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } \delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigotimes_{k=1}^{p} T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i)) \circ \mathsf{m}_{\underbrace{\langle T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)), \ldots, T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j))\rangle}_{n \text{ fois}}} \\
&\quad \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(par naturalité de m)} \\
&= \bigotimes_{k=1}^{p} T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i)) \circ T(c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}) \\
&\quad \circ \delta_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(car } c^n{}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \text{ est un morphisme de cogèbres)} \\
&= \bigotimes_{k=1}^{p} T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i)) \circ T(c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}) \\
&\quad \circ T(\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle}) \circ T(\bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(par le Fait 3.3.21)} \\
&= \bigotimes_{k=1}^{p} T(g_k) \circ c^p_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&= \bigotimes_{k=1}^{p} T(g_k) \circ \bigotimes_{k=1}^{p} T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \\
&\quad \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(par naturalité de } c^p) \\
&= \bigotimes_{k=1}^{p} (T(g_k) \circ T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j})) \\
&\quad \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&= id_{\bigotimes_{k=1}^p T(C_k)} \circ_{\mathfrak{M}} (\langle g_1, \ldots, g_p\rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle)
\end{aligned}
$$

□

Par le Lemme 3.3.22, on peut donc définir le semi-foncteur $G_{\Lambda(\mathfrak{M})}$ de la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers la catégorie $\mathbb{C}$ qui à tout objet $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$ assigne l'objet $\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)$ de $\mathbb{C}$ et qui à toute flèche $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ dans la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ assigne la flèche $id_{\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)} \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de $\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)$ vers $\bigotimes_{i=1}^n T(B_i)$ dans la catégorie $\mathbb{C}$.

On note $F_{\Lambda(\mathfrak{M})}$ le foncteur de $\mathbb{C}$ vers $\Lambda(\mathfrak{M})$ qui à l'objet A de $\mathbb{C}$ assigne l'objet $\langle A\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$ et à la flèche f de A vers B dans la catégorie $\mathbb{C}$ assigne la flèche $\langle f \circ d_A\rangle$ de $\langle A\rangle$ vers $\langle B\rangle$ dans la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$.

Pour tout $f \in \mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1, \dots, A_m\rangle), B]$, on pose

$$\alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\dots,A_m\rangle,B}(f) = \langle f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_i})\rangle \enspace .$$

Pour tout $\langle g\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \dots, A_m\rangle, F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)]$, on pose

$$\beta_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\dots,A_m\rangle,B}(\langle g\rangle) = g \enspace .$$

Proposition 3.3.23. $(G_{\Lambda(\mathfrak{M})}, F_{\Lambda(\mathfrak{M})}, \alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})}, \beta_{\Lambda(\mathfrak{M})})$ *est une semi-adjonction de la catégorie* $\Lambda(\mathfrak{M})$ *vers la catégorie* $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soient $j \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A'_1, \dots, A'_n\rangle, \langle A_1, \dots, A_m\rangle]$ et $k \in \mathbb{C}[B, B']$.

Pour tout $f \in \mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1, \dots, A_m\rangle), B]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle k \circ f \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \circ_{\mathfrak{M}} j)\rangle &= \langle (k \circ f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})) \circ_{\mathfrak{M}} j\rangle \\
&= \langle ((k \circ f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})) \circ_{\mathfrak{M}} j) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{A'_i})\rangle \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.14)} \\
&= \langle k \circ f \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ_{\mathfrak{M}} j) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{A'_i})\rangle
\end{aligned}$$

donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1, \dots, A_m\rangle), B] & \xrightarrow{\alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\dots,A_m\rangle,B}} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \dots, A_m\rangle, F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)] \\
{\scriptstyle k \circ - \circ G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(j)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(k) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} - \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} j} \\
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A'_1, \dots, A'_n\rangle), B'] & \xrightarrow[\alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A'_1,\dots,A'_n\rangle,B'}]{} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A'_1, \dots, A'_n\rangle, F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B')].
\end{array}$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $\langle g\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \dots, A_m\rangle, F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (k \circ d_B) \circ_{\mathfrak{M}} \langle g \circ_{\mathfrak{M}} j\rangle\rangle &= \langle k \circ (g \circ_{\mathfrak{M}} j)\rangle \\
&= \langle (k \circ g) \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^{m} A_j} \circ_{\mathfrak{M}} j)\rangle \\
&= \langle (k \circ g) \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^{m} A_j} \circ_{\mathfrak{M}} j) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{A'_i})\rangle \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.14)}
\end{aligned}$$

donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1,\ldots,A_m\rangle),B] & \xleftarrow{\beta_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,B}} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)] \\
{\scriptstyle k\circ - \circ G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(k)\circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} - \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} j} \\
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle),B'] & \xrightarrow[\alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,B'}]{} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B')].
\end{array}$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $f \in \mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1,\ldots,A_m\rangle),B]$, on a

$$\begin{aligned}
k\circ f\circ(id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}\circ_{\mathfrak{M}} j) &= k\circ(d_B\circ_{\mathfrak{M}}\langle f\circ(id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}\circ_{\mathfrak{M}} j)\rangle) \\
&= (k\circ d_B)\circ_{\mathfrak{M}}\langle f\circ(id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}\circ_{\mathfrak{M}} j)\rangle \\
&= (k\circ d_B)\circ_{\mathfrak{M}}\langle(f\circ\bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}))\circ_{\mathfrak{M}} j\rangle \\
&\qquad \text{(par la Remarque 3.3.13)}
\end{aligned}$$

donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1,\ldots,A_m\rangle),B] & \xrightarrow{\alpha_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,B}} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)] \\
{\scriptstyle k\circ - \circ G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(k)\circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} - \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} j} \\
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle),B'] & \xleftarrow[\beta_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,B'}]{} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B')].
\end{array}$$

commute dans la catégorie **Ens**.

Pour tout $\langle g\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)]$, on a

$$\begin{aligned}
k\circ g\circ(id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}\circ_{\mathfrak{M}} j) &= k\circ((g\circ id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j})\circ_{\mathfrak{M}} j) \\
&= k\circ(g\circ_{\mathfrak{M}} j) \\
&= k\circ(d_B\circ_{\mathfrak{M}}\langle g\circ_{\mathfrak{M}} j\rangle) \\
&= (k\circ d_B)\circ_{\mathfrak{M}}\langle g\circ_{\mathfrak{M}} j\rangle
\end{aligned}$$

donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A_1,\ldots,A_m\rangle),B] & \xleftarrow{\beta_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,B}} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B)] \\
{\scriptstyle k\circ - \circ G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(j)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(k)\circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} - \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} j} \\
\mathbb{C}[G_{\Lambda(\mathfrak{M})}(\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle),B'] & \xleftarrow[\beta_{\Lambda(\mathfrak{M})\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,B'}]{} & \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A'_1,\ldots,A'_n\rangle,F_{\Lambda(\mathfrak{M})}(B')].
\end{array}$$

commute dans la catégorie **Ens**. □

Une structure cartésienne fermée faible sur $\Lambda(\mathfrak{M})$

Définition 3.3.24. *Pour tout objet A de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose $!_A = \langle\rangle$.*

Définition 3.3.25. *Pour tous objets $B^1 = \langle B_1, \dots, B_n\rangle$ et $B^2 = \langle B_{n+1}, \dots, B_{n+p}\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose :*
- $B^1 \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} B^2 = \langle B_1, \dots, B_{n+p}\rangle$;
- $\pi^1_{B^1, B^2} = \langle d^1_{\langle B_1,\dots,B_{n+p}\rangle}, \dots, d^n_{\langle B_1,\dots,B_{n+p}\rangle}\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle B_1, \dots, B_{n+p}\rangle, \langle B_1, \dots, B_n\rangle]$;
- *et* $\pi^2_{B^1, B^2} = \langle d^{n+1}_{\langle B_1,\dots,B_{n+p}\rangle}, \dots, d^{n+p}_{\langle B_1,\dots,B_{n+p}\rangle}\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle B_1, \dots, B_{n+p}\rangle, \langle B_{n+1}, \dots, B_{n+p}\rangle]$.

Définition 3.3.26. *Pour tous $f^1 = \langle f_1, \dots, f_n\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[A, \langle B_1, \dots, B_n\rangle]$, $f^2 = \langle f_{n+1}, \dots, f_{n+p}\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[A, \langle B_{n+1}, \dots, B_{n+p}\rangle]$, on pose $\langle f^1, f^2\rangle_{\mathfrak{M}} = \langle f_1, \dots, f_{n+p}\rangle$.*

Proposition 3.3.27. $(\Lambda(\mathfrak{M}), \langle\rangle, !, \times_{\Lambda(\mathfrak{M})}, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{M}})$ *est une structure cartésienne.*

Démonstration. Appliquer le Lemme 3.3.20. □

Définition 3.3.28. *Soient $f \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \dots, A_m\rangle, C]$ et $g \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_{m+1}, \dots, A_{m+n}\rangle, D]$. On pose*

$$f \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} g = \langle f \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle A_{m+1},\dots,A_{m+n}\rangle}, g \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^2_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle A_{m+1},\dots,A_{m+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \ .$$

Lemme 3.3.29. *Pour tout entier $m \geq 1$, pour tout $f \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), B]$ tel que $f \circ \bigotimes_{j=1}^m T(id_{A_j}) = f$, on a*

$$f \circ_{\mathfrak{M}} \pi^1_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle A_{m+1}\rangle} = f \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \ .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
f \circ_{\mathfrak{M}} \pi^1_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle A_{m+1}\rangle} &= f \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^1_{A_1,\dots,A_{m+1}}, \dots, d^m_{A_1,\dots,A_{m+1}}\rangle \\
&= f \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^1_{A_1,\dots,A_m} \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}), \dots, \\
&\quad d^m_{A_1,\dots,A_m} \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}})\rangle \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{A_1,\dots,A_m} \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}})) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^{m+1} TA_j} \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{\langle TA_1,\dots,TA_{m+1}\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j} \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^m T(d^j_{A_1,\dots,A_m}) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}})) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{\langle TA_1,\dots,TA_{m+1}\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(par naturalité de } c^m\text{)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{A_1,\ldots,A_m}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m),I\rangle} \\
&\quad \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{T(A_j)}) \otimes T(w_{A_{m+1}})) \circ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \delta_{A_j} \\
&\quad \text{(par naturalité de } \mathsf{m}) \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{A_1,\ldots,A_m}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j}) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m),I\rangle} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \otimes (\mathsf{n} \circ w_{A_{m+1}})) \\
&\quad \text{((}T,\delta,d\text{) est une comonade faible et } w_{A_{m+1}} \text{ est un morphisme de cogèbres)} \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{A_1,\ldots,A_m}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j}) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m),I\rangle} \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(T(A_j))} \otimes \mathsf{n}) \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{A_1,\ldots,A_m}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle TA_1,\ldots,TA_m\rangle} \\
&\quad \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(T(A_j))} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \\
&\quad \text{(par le Fait 3.3.9)} \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^{j}_{A_1,\ldots,A_m}) \circ c^{m}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ \mathsf{m}_{\langle TA_1,\ldots,TA_m\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&\quad \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \\
&\quad \text{(par naturalité de } \rho) \\
&= (f \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^{1}_{A_1,\ldots,A_m}, \ldots, d^{m}_{A_1,\ldots,A_m}\rangle) \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \\
&= f \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \\
&= f \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{TA_j} \otimes w_{A_{m+1}}) \ .
\end{aligned}
$$

□

Définition 3.3.30. *Pour tout entier n, pour tous objets $A_1, \ldots, A_n$, C de $\mathbb{C}$, on définit, par induction sur n, $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \Rightarrow C$:*

- *$\langle\rangle \Rightarrow C = C$;*
- *$\langle A_1, \ldots, A_{n+1}\rangle \Rightarrow C = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle \Rightarrow (TA_{n+1} \multimap C)$.*

Pour tous objets A et $\langle C_1, \ldots, C_p\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose $A \Rightarrow \langle C_1, \ldots, C_p\rangle = \langle A \Rightarrow C_1, \ldots, A \Rightarrow C_p\rangle$.

Puisque la catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ est fermée, pour tout objet B de $\mathbb{C}$, il existe une adjonction $(- \otimes B, B \multimap -, \xi^B)$.

Définition 3.3.31. *Pour tout entier n, pour tout* $h \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \ldots, A_m\rangle \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle B_1, \ldots, B_n\rangle, C]$*, on définit, par induction sur n,* $\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \ldots, A_m\rangle, \langle B_1, \ldots, B_n\rangle \Rightarrow C]$.

- *Si* $n = 0$, $\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) = h$.
- *Si* $n = 1$*, alors on pose* $C = \langle C_1, \ldots, C_p\rangle$ *et* $h = \langle h_1, \ldots, h_p\rangle$*. Il y a deux cas.*
  - *Dans le cas où* $m = 0$*, on pose* $\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) = \langle \xi^{T(B_1)}_{I,C_1}(h_1 \circ \lambda_{T(B_1)}), \ldots, \xi^{T(B_1)}_{I,C_p}(h_p \circ \lambda_{T(B_1)})\rangle$.
  - *Dans le cas où* $m \neq 0$*, on pose* $\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) = \langle \xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j),C_1}(h_1), \ldots, \xi^{TB_1}_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j,C_p}(h_p)\rangle$.
- *Si* $n \geq 1$, $\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) = \Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,T(B_{n+1})\multimap C}(\Lambda^{\langle B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n\rangle,C}(h))$.

Proposition 3.3.32. *Soient*

- $h \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \ldots, A_m\rangle \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle B_{q+1}, \ldots, B_{q+n}\rangle, C]$
- *et* $u \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle B_1, \ldots, B_q\rangle, \langle A_1, \ldots, A_m\rangle]$.

On a

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(h \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}}) \quad .
\end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur n. On pose $C = \langle C_1, \ldots, C_p\rangle$, $h = \langle h_1, \ldots, h_p\rangle$ et $u = \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$.

Si $n = 0$, alors on a $\langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} = u$.

Supposons $n = 1$. Si $q = 0$ et $m = 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_1\rangle}_{\langle\rangle,C}(h) \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(h \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}}) \quad .
\end{aligned}$$

Dans le cas $q = 0$ et $m \neq 0$, remarquer que l'on a

$$\begin{aligned}
& (w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1} \circ \lambda_{T(B_1)} \\
= \quad & \lambda_{I\otimes T(B_1)} \circ (id_I \otimes ((w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1})) \\
& \text{ (par naturalité de } \lambda) \\
= \quad & (id_I \otimes \lambda_{T(B_1)}) \circ (id_I \otimes ((w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1})) \\
= \quad & id_I \otimes (\lambda_{T(B_1)} \circ (w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1}) \\
= \quad & id_I \otimes id_{T(B_1)} \\
& \text{ (} (T(B_1), c_{B_1}, w_{B_1}) \text{ est un comonoïde dans } \mathcal{C})
\end{aligned}$$

et en déduire que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a

$$\begin{aligned}
& \xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j),C_k}(h_k) \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_I \circ \mathsf{n} \\
= \quad & \xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_I \circ \mathsf{n} \circ w_{B_1}) \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1} \circ \lambda_{T(B_1)})
\end{aligned}$$

$$= \quad \xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_I \circ \mathsf{n} \circ w_{B_1}) \otimes T(id_{B_1})) \circ c_{B_1} \circ \lambda_{T(B_1)}) \ .$$

Dans le cas $q \neq 0$ et $m = 0$, on a

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \langle \xi^{T(B_{q+1})}_{I,C_1}(h_1 \circ \lambda_{T(B_{q+1})}) \circ w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}, \ldots, \\
& \xi^{T(B_{q+1})}_{I,C_1}(h_p \circ \lambda_{T(B_{q+1})}) \circ w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}\rangle \\
= \quad & \langle \xi^{T(B_{q+1})}_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k),C_1}(h_1 \circ \lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})})), \ldots, \\
& h_p \circ \lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})}))\rangle \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(h \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}}) \ .
\end{aligned}$$

Traitons le cas $q \neq 0$ et $m \neq 0$. Pour $1 \leq l \leq p$, on a

$$\begin{aligned}
& h_l \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \\
= \quad & h_l \circ_{\mathfrak{M}} \langle\langle u_1,\ldots,u_m\rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \\
= \quad & h_l \circ_{\mathfrak{M}} \langle u_1 \circ_{\mathfrak{M}} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1}\rangle}, \ldots, u_m \circ_{\mathfrak{M}} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1}\rangle}, d^{q+1}_{B_1,\ldots,B_{q+1}}\rangle \\
= \quad & h_l \circ_{\mathfrak{M}} \langle u_1 \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}), \ldots, u_m \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}), \\
& \lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})\rangle \\
& \text{(par le Lemme 3.3.29)} \\
= \quad & h_l \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \otimes id_{TB_{q+1}}) \\
& \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}))) \\
& \otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}}))) \\
& \circ (c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} TB_k} \otimes id_{T\bigotimes_{k=1}^{q+1} TB_k}) \circ c_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} TB_k} \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
& \text{(par définition de } \circ_{\mathfrak{M}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & h_l \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \otimes id_{T(B_{q+1})}) \\
& \circ((T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}))) \\
& \otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}}))) \\
& \circ c_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
& \text{(par naturalité de } c^m\text{)} \\
= \quad & h_l \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes T(id_{B_{q+1}})) \\
& \text{(par le Lemme 3.3.16)} \\
= \quad & h_l \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \otimes T(id_{B_{q+1}})) \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_q\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{TB_{q+1}}) \\
= \quad & h_l \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_q\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{TB_{q+1}}) \quad .
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$
\begin{aligned}
& \xi^{T(B_{q+1})}_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k, C_l}(h_l \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle} \rangle_{\mathfrak{M}}) \\
= \quad & \xi^{T(B_{q+1})}_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k, C_l}(h_l \circ ((\bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^{q} TB_j} \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_q\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{q} \delta_{B_j}) \otimes id_{TB_{q+1}})) \\
= \quad & \xi^{T(B_{q+1})}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_l}(h_l) \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(u_j) \circ c^m_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_q\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \\
= \quad & \xi^{T(B_{q+1})}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_l}(h_l) \circ_{\mathfrak{M}} u
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
& \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(h) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_{q+1}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,C}(\langle h_1,\ldots,h_p\rangle) \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \langle \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_1}(h_1), \ldots, \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_p}(h_p) \rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} u \\
= \quad & \langle \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_1}(h_1) \circ_{\mathfrak{M}} u, \ldots, \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{m} TA_j, C_p}(h_p) \circ_{\mathfrak{M}} u \rangle \\
= \quad & \langle \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{q} TB_j, C_1}(h_1 \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle} \rangle_{\mathfrak{M}}), \ldots, \\
& \xi^{TB_{q+1}}_{\bigotimes_{j=1}^{q} TB_j, C_p}(h_p \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle} \rangle_{\mathfrak{M}}) \rangle \\
= \quad & \Lambda^{\langle B_{q+1}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(\langle h_1 \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle} \rangle_{\mathfrak{M}}, \ldots, \\
& h_p \circ_{\mathfrak{M}} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle} \rangle_{\mathfrak{M}} \rangle)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda^{\langle B_{q+1}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(\langle h_1,\ldots,h_p\rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}}) \\
&= \Lambda^{\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,C}(h \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}}) \ .
\end{aligned}$$

Supposons la proposition vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Pour vérifier qu'elle est vraie en $n+1$, il suffit de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned}
&\langle\langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_{q+n}\rangle,\langle B_{q+n+1}\rangle}, \\
&\pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_{q+n}\rangle,\langle B_{q+n+1}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \\
= \ &\langle u \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \pi^1_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n+1}\rangle}, \pi^2_{\langle B_1,\ldots,B_q\rangle,\langle B_{q+1},\ldots,B_{q+n+1}\rangle}\rangle_{\mathfrak{M}} \ .
\end{aligned}$$

□

Pour tous objets B et C de $\mathbb{C}$, on définit une flèche $\epsilon_{C,B}$ de $(B \multimap C) \otimes B$ vers C dans $\mathbb{C}$ en posant

$$\epsilon_{C,B} = (\xi^B_{B\multimap C,C})^{-1}(id_{B\multimap C}) \ .$$

Définition 3.3.33. *Pour tous entiers n et p, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on définit, par induction sur n, $ev^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \in \mathbb{C}[\bigotimes_{j=1}^p T(\langle B_1,\ldots,B_n\rangle \Rightarrow C_j) \otimes TB_1 \otimes \ldots \otimes TB_n, C_k]$:*

- *si $n = 0$, $ev^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} = d^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle}$;*
- *$ev^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_{n+1}\rangle} = \epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \circ (ev^k_{B_{n+1}\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \otimes T(id_{B_{n+1}}))$.*

On pose $ev_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} = \langle ev^1_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle},\ldots,ev^p_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}\rangle$.

Fait 3.3.34. *Pour tous objets C et B de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on a $ev_{C,B} \in \Lambda(\mathfrak{M})[(B \Rightarrow C) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} B, C]$.*

Démonstration. On pose $C = \langle C_1,\ldots,C_p\rangle$ et on montre, par induction sur n, que pour tout objet $B = \langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on a

$$ev^k_{C,B} \in \Lambda(\mathfrak{M})[(B \Rightarrow C) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} B, \langle C_k\rangle] \ .$$

□

Lemme 3.3.35. *Soient m et n deux entiers non nuls. Pour toute suite flèche $f = \langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ de $\langle A_1,\ldots,A_m\rangle$ vers $\langle B_1,\ldots,B_n\rangle$ et pour tout $g \in \mathbb{C}[\bigotimes_{i=1}^n TB_i, C]$, on a*

$$(g \otimes id_{TB}) \circ_{\mathfrak{M}} (f \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B\rangle}) = (g \circ_{\mathfrak{M}} f) \otimes T(id_B) \ .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
&(g \otimes id_{TB}) \circ_{\mathfrak{M}} (f \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B\rangle}) \\
= \ &(g \otimes id_{T(B)}) \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1 \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{T(A_j)} \otimes w_B),\ldots, f_n \circ \rho_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^m id_{T(A_j)} \otimes w_B), \\
&\lambda_B \circ ((w_{\bigotimes_{i=1}^n T(A_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}) \otimes d_B)\rangle
\end{aligned}$$

(par le Lemme 3.3.29)

$$\begin{aligned}
&= (g \otimes id_{T(B)}) \\
&\quad \circ((\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \otimes w_B))) \\
&\quad \otimes T(\lambda_B \circ ((w_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i}) \otimes d_B)) \\
&\quad \circ(c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\otimes T(B)} \otimes id_{T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\otimes T(B))}) \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\otimes T(B)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m),T(B)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
&= (g \otimes id_{T(B)}) \\
&\quad \circ(((\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j))} \circ T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \otimes w_B))) \\
&\quad \otimes T(\lambda_B \circ ((w_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i}) \otimes d_B))) \\
&\quad \circ c_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\otimes T(B)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m),T(B)\rangle} \\
&\qquad \text{(par naturalité de } c^n) \\
&= (g \otimes id_{T(B)}) \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j))} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \otimes T(id_B)) \\
&\qquad \text{(par le Lemme 3.3.16)} \\
&= (g \circ_{\mathfrak{M}} f) \otimes T(id_B) \ .
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.36. *Pour tout $h \in \Lambda(\mathfrak{M})[A \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} B, C]$, on a $ev_{C,B} \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} (\Lambda^B_{A,C}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_B) = h$.*

Démonstration. On montre, par récurrence sur n, que pour toute flèche $h = \langle h_1, \dots, h_p\rangle$ de $\langle A_1, \dots, A_m\rangle \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle B_1, \dots, B_n\rangle$ vers $\langle C_1, \dots, C_p\rangle$ dans la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, on a

$$ev^k_{\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1,\dots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}) = h_k \ .$$

– Si $n = 0$, on a

$$\begin{aligned}
& ev^k_{\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1,\dots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}) \\
=\ & d^k_{C_1,\dots,C_p} \circ_{\mathfrak{M}} h \\
=\ & h_k \\
& \text{(par le Lemme 3.3.20).}
\end{aligned}$$

– Supposons $n = 1$. Traitons le cas $m = 0$. On a

$$\Lambda^{\langle B_1\rangle}_{\langle\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda} id_{\langle B_1\rangle} = \langle \xi^{T(B_1)}_{I,C_1}(h_1 \circ \lambda_{T(B_1)}) \circ w_{B_1}, \dots, \xi^{T(B_1)}_{I,C_p}(h_p \circ \lambda_{T(B_1)}) \circ w_{B_1}, d_{B_1}\rangle$$

et

$$ev^k_{\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1\rangle} = \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1 \Rightarrow \langle C_1,\dots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1}))$$

donc on a

$$
\begin{array}{rl}
& ev^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,\langle C_1,\ldots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}) \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)})) \circ \bigotimes_{k=1}^{p} T(w_{B_1})) \otimes T(d_{B_1})) \\
& \circ(c^p_{T(B_1)} \otimes id_{T(T(B_1))}) \circ c_{T(B_1)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1)\rangle} \circ \delta_{B_1} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)})) \circ \bigotimes_{k=1}^{p} T(w_{B_1})) \otimes T(d_{B_1})) \circ (c^p_{T(B_1)} \otimes id_{T(T(B_1))}) \circ c_{T(B_1)} \circ \delta_{B_1} \\
& \text{(car } (T,\delta,d) \text{ est une comonade faible)} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)})) \circ c^p_I \circ T(w_{B_1})) \otimes T(d_{B_1})) \circ c_{T(B_1)} \circ \delta_{B_1} \\
& \text{(par naturalité de } c^p\text{)} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)})) \circ c^p_I \circ T(w_{B_1})) \otimes T(d_{B_1})) \circ (\delta_{B_1} \otimes \delta_{B_1}) \circ c_{B_1} \\
& \text{(car } \delta_{B_1} \text{ est un morphisme de comonoïdes)} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)})) \circ c^p_I \circ \mathsf{n}) \otimes id_{T(B_1)}) \circ (w_{B_1} \otimes T(id_{B_1})) \circ c_{B_1} \\
& \text{((} T,\delta,d \text{) est une comonade faible et } w_{B_1} \text{ est un morphisme de cogèbres)} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ ((d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} \langle \xi^{T(B_1)}_{I,C_1}(h_1 \circ \lambda_{T(B_1)}),\ldots,\xi^{T(B_1)}_{I,C_p}(h_p \circ \lambda_{T(B_1)})\rangle) \otimes id_{T(B_1)}) \\
& \circ(w_{B_1} \otimes T(id_{B_1})) \circ c_{B_1} \\
= & \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (\xi^{T(B_1)}_{I,C_k}(h_k \circ \lambda_{T(B_1)}) \otimes id_{T(B_1)}) \circ (w_{B_1} \otimes T(id_{B_1})) \circ c_{B_1} \\
& \text{(par le Lemme 3.3.20)} \\
= & h_k \circ \lambda_{T(B_1)} \circ (w_{B_1} \otimes T(id_{B_1})) \circ c_{B_1} \\
= & h_k \circ \lambda_{T(B_1)} \circ (id_I \otimes T(id_{B_1})) \circ (w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1} \\
= & h_k \circ T(id_{B_1}) \circ \lambda_{T(B_1)} \circ (w_{B_1} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1} \\
& \text{(par naturalité de } \lambda\text{)} \\
= & h_k \circ T(id_{B_1}) \\
& \text{(car } (T(B_1), c_{B_1}, w_{B_1}) \text{ est un comonoïde dans } \mathcal{C}\text{)} \\
= & h_k \quad .
\end{array}
$$

Traitons le cas $m \neq 0$. On a

$$
ev^k_{\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,\langle C_1,\ldots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle})
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\dots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \circ ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j),C_k}(h_k)) \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}) \otimes id_{T(B_1)}) \\
& \circ(T(\rho_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} id_{T(A_j)} \otimes w_{B_1})) \\
& \otimes T(\lambda_{B_1} \circ ((w_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \otimes d_{B_1}))) \\
& \circ c_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)\otimes T(B_1)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m),T(B_1)\rangle} \circ (\bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \otimes \delta_{B_1}) \\
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\dots,C_p\rangle} \otimes T(id_{B_1})) \\
& \circ((\bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j),C_k}(h_k)) \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}) \otimes id_{T(B_1)}) \\
& \circ((\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \otimes T(id_{B_1})) \\
& \text{(par le Lemme 3.3.16)} \\
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \\
& \circ((d^k_{B_1\Rightarrow\langle C_1,\dots,C_p\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{p} T(\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}(h_k)) \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \\
& \otimes T(id_{B_1})) \\
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \\
& \circ((\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}(h_k) \circ d_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j),\dots,\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\rangle}_{p \text{ fois}}} \circ c^p_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \\
& \otimes T(id_{B_1})) \\
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}(h_k) \otimes T(id_{B_1})) \\
& \text{(par les Lemmes 3.3.18 et 3.3.17)} \\
= \;& \epsilon_{C_k,T(B_1)} \circ (\xi^{T(B_1)}_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}(h_k) \otimes id_{T(B_1)}) \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \otimes T(id_{B_1})) \\
= \;& h_k \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \otimes T(id_{B_1})) \\
= \;& h_k \quad .
\end{aligned}
$$

– Supposons la proposition démontrée pour un certain entier $n \geq 1$. On a

$$
\begin{aligned}
& ev^k_{\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1,\dots,B_{n+1}\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\dots,B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\dots,B_{n+1}\rangle}) \\
= \;& (\epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \circ (ev^k_{B_{n+1}\Rightarrow\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1,\dots,B_n\rangle} \otimes T(id_{B_{n+1}}))) \\
& \circ_{\mathfrak{M}}((\Lambda^{\langle B_1,\dots,B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_{n+1}\rangle}) \\
= \;& \epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \circ ((ev^k_{B_{n+1}\Rightarrow\langle C_1,\dots,C_p\rangle,\langle B_1,\dots,B_n\rangle} \otimes T(id_{B_{n+1}})) \\
& \circ_{\mathfrak{M}}((\Lambda^{\langle B_1,\dots,B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\dots,A_m\rangle,\langle C_1,\dots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\dots,B_n\rangle}) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_{n+1}\rangle}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \\
&\quad \circ((ev^k_{B_{n+1}\Rightarrow\langle C_1,\ldots,C_p\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} (\Lambda^{\langle B_1,\ldots,B_{n+1}\rangle}_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,\langle C_1,\ldots,C_p\rangle}(h) \times_{\Lambda(\mathfrak{M})} id_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle})) \otimes T(id_{B_{n+1}})) \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.35)} \\
&= \epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \circ (\xi^{TB_{n+1}}_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j\otimes TB_1\otimes\ldots\otimes TB_n,C_k}(h_k) \otimes T(id_{B_{n+1}})) \\
&\quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \epsilon_{C_k,TB_{n+1}} \circ (\xi^{TB_{n+1}}_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j\otimes TB_1\otimes\ldots\otimes TB_n,C_k}(h_k) \otimes id_{TB_{n+1}}) \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j\otimes TB_1\otimes\ldots\otimes TB_n} \otimes T(id_{B_{n+1}})) \\
&= h_k \circ (id_{\bigotimes_{j=1}^m TA_j\otimes TB_1\otimes\ldots\otimes TB_n} \otimes T(id_{B_{n+1}})) \\
&= h_k \ .
\end{aligned}
$$

□

Théorème 3.3.37. $(\Lambda(\mathfrak{M}), \epsilon, !, \times_{\Lambda(\mathfrak{M})}, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{M}}, \Rightarrow, \Lambda, ev)$ *est une structure cartésienne fermée faible.*

Démonstration. Appliquer les Propositions 3.3.27, 3.3.32 et 3.3.36. □

On verra au Chapitre 6 que cette structure n'est pas nécessairement une structure cartésienne fermée.

La construction de Hyland

Etant donné un modèle extensionnel $\mathfrak{M} = (((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d), c, w)$ de IMELL, Hyland a exhibé une catégorie cartésienne fermée $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$, qui est une sous-catégorie de la catégorie $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ des $\mathbb{T}$-cogèbres. On va voir que, dans le cas extensionnel, il existe une équivalence faible de catégories $H_{\mathfrak{M}}$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$: en un certain sens, $\Lambda(\mathfrak{M})$ est à $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$ ce que la catégorie de (co)Kleisli est à la catégorie des (co)algèbres libres.

Définition 3.3.38. *Etant donné un modèle extensionnel $\mathfrak{M}$ de IMELL, les données suivantes définissent une catégorie $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$:*

- *les objets sont de la forme $(\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j})$ avec $A_1, \ldots, A_m$ des objets de $\mathbb{C}$;*
- *une flèche de*
$$H = (\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j})$$
vers
$$H' = (\bigotimes_{i=1}^n T(B_i), \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{B_i})$$
est une flèche f de H vers H' dans $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$;
- *la composition est la même que celle dans $\mathbb{C}$;*
- *l'identité de $(\bigotimes_{j=1}^m T(A_j), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{A_j})$ est $id_{\bigotimes_{j=1}^m A_j}$.*

Pour tout objet $A = \langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose $H_{\mathfrak{M}}(A) = \bigotimes_{i=1}^n T(A_i)$ et pour toute flèche $f = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose $H_{\mathfrak{M}}(f) = \bigotimes_{i=1}^n T(id_{B_i}) \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$; le lemme suivant montre que l'on a

$$H_{\mathfrak{M}}(f) \in \mathcal{H}(\mathfrak{M})[(\bigotimes_{i=1}^n T(A_i), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}), (\bigotimes_{i=1}^n T(B_j), \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^m \delta_{B_j})] \ .$$

Lemme 3.3.39. *Pour toute flèche $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ de $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n \rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j) & \xrightarrow{\mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i}} & T(\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)) \\ H_{\mathfrak{M}}(f) \downarrow & & \downarrow T(H_{\mathfrak{M}}(f)) \\ \bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i) & \xrightarrow[\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{B_j}]{} & T(\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i)) \end{array}$$

commute dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
& (\delta_{T(A)\otimes T(B)} \otimes \delta_{T(A)\otimes T(B)}) \circ c_{T(A)\otimes T(B)} \circ \mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
= \; & (\delta_{T(A)\otimes T(B)} \otimes \delta_{T(A)\otimes T(B)}) \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))} \circ (c_{T(A)} \otimes c_{T(B)}) \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
& \text{(par monoïdalité de } c) \\
= \; & (\delta_{T(A)\otimes T(B)} \otimes \delta_{T(A)\otimes T(B)}) \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))} \\
& \circ ((c_{T(A)} \circ \delta_A) \otimes (c_{T(B)} \circ \delta_B)) \\
= \; & (\delta_{T(A)\otimes T(B)} \otimes \delta_{T(A)\otimes T(B)}) \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))} \\
& \circ (((\delta_A \otimes \delta_A) \circ c_A) \otimes ((\delta_B \otimes \delta_B) \circ c_B)) \\
& \text{(car } \delta_A \text{ et } \delta_B \text{ sont des morphismes de comonoïdes)} \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB})) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB}))) \\
& \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))} \circ (((\delta_A \otimes \delta_A) \circ c_A) \otimes ((\delta_B \otimes \delta_B) \circ c_B)) \\
& \text{(par monoïdalité de } \delta) \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB})) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB}))) \\
& \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))} \circ ((\delta_A \otimes \delta_A) \otimes (\delta_B \otimes \delta_B)) \circ (c_A \otimes c_B) \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB})) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB} \circ (\delta_{TA} \otimes \delta_{TB}))) \\
& \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB}) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB})) \circ ((\delta_{T(A)} \otimes \delta_{T(B)}) \otimes (\delta_{T(A)} \otimes \delta_{T(B)})) \\
& \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB}) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ \mathsf{m}_{TTA,TTB})) \circ ((T(\delta_A) \otimes T(\delta_B)) \otimes (T(\delta_A) \otimes T(\delta_B))) \\
& \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
& \text{(car } (T, \delta, d) \text{ est une comonade faible)} \\
= \; & ((T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ T(\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (T(\mathsf{m}_{TA,TB}) \circ T(\delta_A \otimes \delta_B))) \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \\
& \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
& \text{(par naturalité de } \mathsf{m})
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
& \mathsf{m}_{T(T(A)\otimes T(B)),T(T(A)\otimes T(B))} \circ (\delta_{T(A)\otimes T(B)} \otimes \delta_{T(A)\otimes T(B)}) \circ c_{T(A)\otimes T(B)} \circ \mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
= \; & \mathsf{m}_{T(T(A)\otimes T(B)),T(T(A)\otimes T(B))} \circ (T(\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes T(\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B))) \\
& \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ \mathsf{m}_{T(A)\otimes T(B),T(A)\otimes T(B)} \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B)\\
&\quad \text{(par naturalité de } \mathsf{m})\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ \mathsf{m}_{T(A)\otimes T(B),T(A)\otimes T(B)} \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \otimes \mathsf{m}_{T(A),T(B)}) \circ \sim_{T(T(A)),T(T(B))}\\
&\quad \circ ((\delta_A \otimes \delta_A) \otimes (\delta_B \otimes \delta_B)) \circ (c_A \otimes c_B)\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ T(\sim_{T(A),T(B)}) \circ \mathsf{m}_{T(A)\otimes T(A),T(B)\otimes T(B)} \circ (\mathsf{m}_{T(A),T(A)} \otimes \mathsf{m}_{T(B),T(B)})\\
&\quad ((\delta_A \otimes \delta_A) \otimes (\delta_B \otimes \delta_B)) \circ (c_A \otimes c_B)\\
&\quad \text{(car } (T, \delta, d) \text{ est monoïdal symétrique)}\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ T(\sim_{T(A),T(B)}) \circ \mathsf{m}_{T(A)\otimes T(A),T(B)\otimes T(B)} \circ ((T(c_A) \circ \delta_A) \otimes (T(c_B) \circ \delta_B))\\
&\quad \text{(car } c_A \text{ et } c_B \text{ sont des morphismes de cogèbres)}\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ T(\sim_{T(A),T(B)}) \circ \mathsf{m}_{T(A)\otimes T(A),T(B)\otimes T(B)} \circ (T(c_A) \otimes T(c_B)) \circ (\delta_A \otimes \delta_B)\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)))\\
&\quad \circ T(\sim_{T(A),T(B)}) \circ T(c_A \otimes c_B) \circ \mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)\\
&\quad \text{(par naturalité de } \mathsf{m})\\
&= T((\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \otimes (\mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B))\\
&\quad \circ \mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)
\end{aligned}
$$

□

On a ainsi défini un foncteur $H_{\mathfrak{M}}$ de la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers la catégorie $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$. La proposition suivante montre que ce foncteur est une équivalence faible de catégories.

Proposition 3.3.40. *Le foncteur $H_{\mathfrak{M}}$ de la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers la catégorie $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$ est une équivalence faible de catégories.*

Démonstration. On commence par montrer que le foncteur $\mathcal{H}_{\mathfrak{M}}$ est plein. Soit

$$k \in \mathcal{H}_{\mathfrak{M}}[(\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i}), (\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_j), \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{B_j})] \enspace .$$

On a

$$
\begin{aligned}
& H_{\mathfrak{M}}(\langle d^1_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ k, \ldots, d^n_{\langle B_1,\ldots B_n\rangle} \circ k\rangle)\\
= & \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(d^i_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(k) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}\\
= & \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(d^i_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}) \circ c^n_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i)} \circ T(k) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}\\
& \text{(par naturalité de } c^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(d^i_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}) \circ c^n_{\bigotimes_{i=1}^{n} T(B_i)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{B_i} \circ k \\
&= (\bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^1_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}, \ldots, d^n_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}\rangle) \circ k \\
&= \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(id_{B_i}) \circ k \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.19)} \\
&= k \ .
\end{aligned}
$$

De plus, le foncteur est fidèle, car si $f = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$ et $g = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$ sont des flèches de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ vers $\langle B_1, \ldots, B_n\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$ telles que $H_{\mathfrak{M}}(f) = \mathcal{H}_{\mathfrak{M}}(g)$, alors $d^i_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} f = d^i_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ_{\mathfrak{M}} g$.

Enfin, si $H = (\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i), \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_n)\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i})$ est un objet de $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$, alors on a $H = H_{\mathfrak{M}}(\langle A_1, \ldots, A_m\rangle)$. □

3.3.3 Avec les additifs

Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{L}, c, w)$ un modèle catégorique de IMELL, avec $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ et $\mathcal{L} = ((T, \delta, d), \mathsf{m}, \mathsf{n})$. Dans cette section, on suppose en outre que $\mathbb{C}$ est une catégorie cartésienne.

On note & un adjoint à droite du foncteur diagonal de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et on définit ainsi, pour tout entier n, un foncteur $\&_{i=1}^{n}$ de la catégorie $\Pi_{i=1}^{n}\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{C}$. On fixe une structure cartésienne $(\mathbb{C}, \&, !, \top, \&, \pi^1, \pi^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_\&)$.

Définition 3.3.41. *Pour tout entier $n \geq 1$, pour tous objets $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{C}$, on définit une flèche de $\varphi_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle}$ de $\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)$ vers $T(\&_{i=1}^{n} A_i)$ dans la catégorie $\mathbb{C}$ en posant*

$$
\varphi_{A_1,\ldots,A_n} = T((\&_{i=1}^{n} d^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^{n} TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^{n} TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\&) \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_{A_i}
$$

et une flèche $\psi_{\langle A_1,\ldots,A_n\rangle}$ de $T(\&_{i=1}^{n} A_i)$ vers $\bigotimes_{i=1}^{n} T(A_i)$ en posant

$$
\psi_{A_1,\ldots,A_n} = \bigotimes_{i=1}^{n} T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ c^n_{\&_{i=1}^{n} A_i} \ .
$$

Proposition 3.3.42. *$\varphi = (\varphi_{A,B})_{A,B\in ob(\mathbb{C})}$ est un semi-isomorphisme naturel normal de $\otimes \circ (T, T)$ vers $T \circ \&$ et $\psi = (\psi_{A,B})_{A,B\in ob(\mathbb{C})}$ est un semi-isomorphisme naturel normal de $T \circ \&$ vers $\otimes \circ (T, T)$.*

Démonstration. En utilisant la Remarque 3.3.11, on obtient facilement la naturalité de φ.

Quant à la naturalité de ψ, *elle* résulte presque immédiatement de la celle de c.

Les diagrammes des Figures 3.3 et 3.4 commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$. D'où

$$
d^1_{A,B} \circ (T(\pi^1_{A,B}) \otimes T(\pi^2_{A,B})) \circ c_{A\&B} = d_A \circ T(\pi^1_{A,B})
$$

et

$$
d^2_{A,B} \circ (T(\pi^1_{A,B}) \otimes T(\pi^2_{A,B})) \circ c_{A\&B} = d_A \circ T(\pi^2_{A,B}) \ .
$$

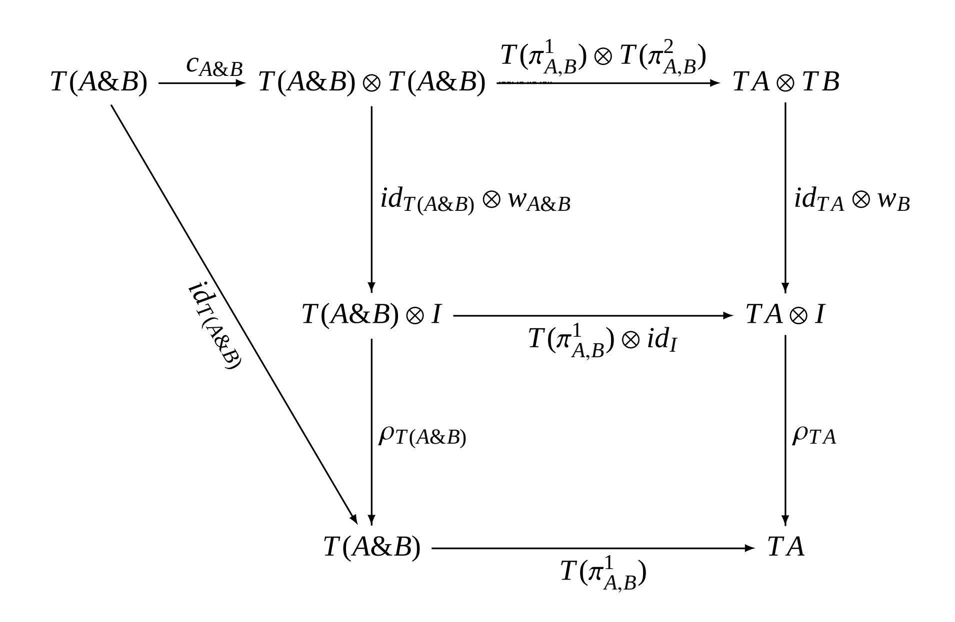

$T(A\&B)$
$c_{A\&B}$
$T(A\&B) \otimes T(A\&B)$
$T(\pi^1_{A,B}) \otimes T(\pi^2_{A,B})$
$TA \otimes TB$
$id_{T(A\&B)} \otimes w_{A\&B}$
$id_{TA} \otimes w_B$
$id_{T(A\&B)}$
$T(A\&B) \otimes I$
$TA \otimes I$
$T(\pi^1_{A,B}) \otimes id_I$
$\rho_{T(A\&B)}$
ρ_{TA}
$T(A\&B)$
TA
$T(\pi^1_{A,B})$

FIG. 3.3 –

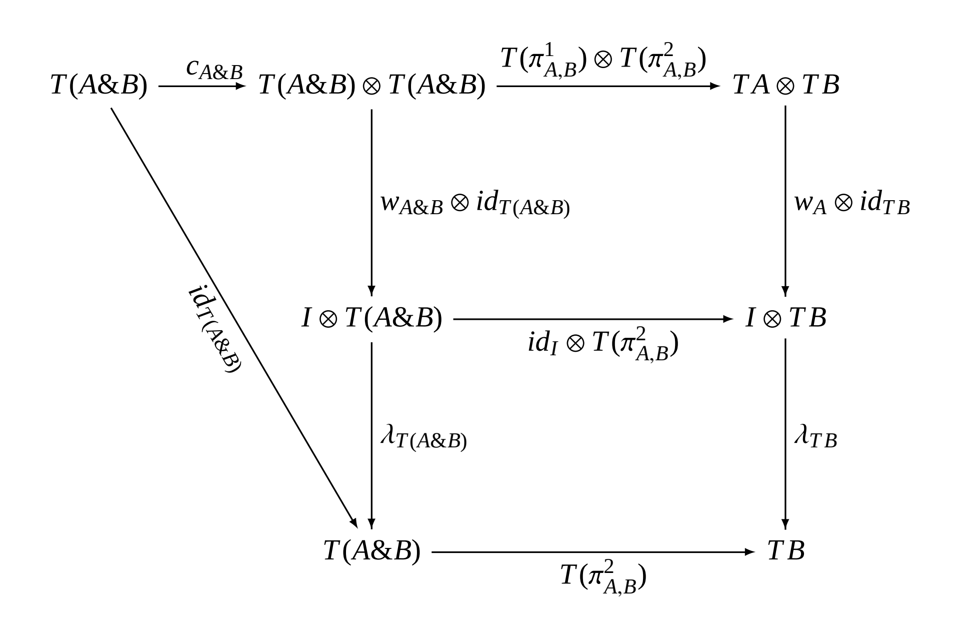

$T(A\&B)$
$c_{A\&B}$
$T(A\&B) \otimes T(A\&B)$
$T(\pi^1_{A,B}) \otimes T(\pi^2_{A,B})$
$TA \otimes TB$
$w_{A\&B} \otimes id_{T(A\&B)}$
$w_A \otimes id_{TB}$
$id_{T(A\&B)}$
$I \otimes T(A\&B)$
$I \otimes TB$
$id_I \otimes T(\pi^2_{A,B})$
$\lambda_{T(A\&B)}$
λ_{TB}
$T(A\&B)$
TB
$T(\pi^2_{A,B})$

FIG. 3.4 –

Donc

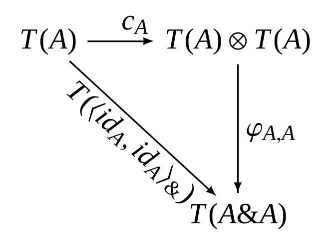
$$\begin{aligned}
\varphi_{A,B} \circ \psi_{A,B} &= T(((d_A \circ T(\pi^1_{A,B}))\&(d_B \circ T(\pi^2_{A,B}))) \circ \langle id_{T(A\&B)}, id_{T(A\&B)}\rangle_\&) \circ \delta_{A\&B} \\
&= T(d_{A\&B}) \circ \delta_{A\&B} \\
&= T(id_{A\&B}) \ .
\end{aligned}$$

Les diagrammes des Figures 3.5, 3.6 et 3.7 commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$. D'où

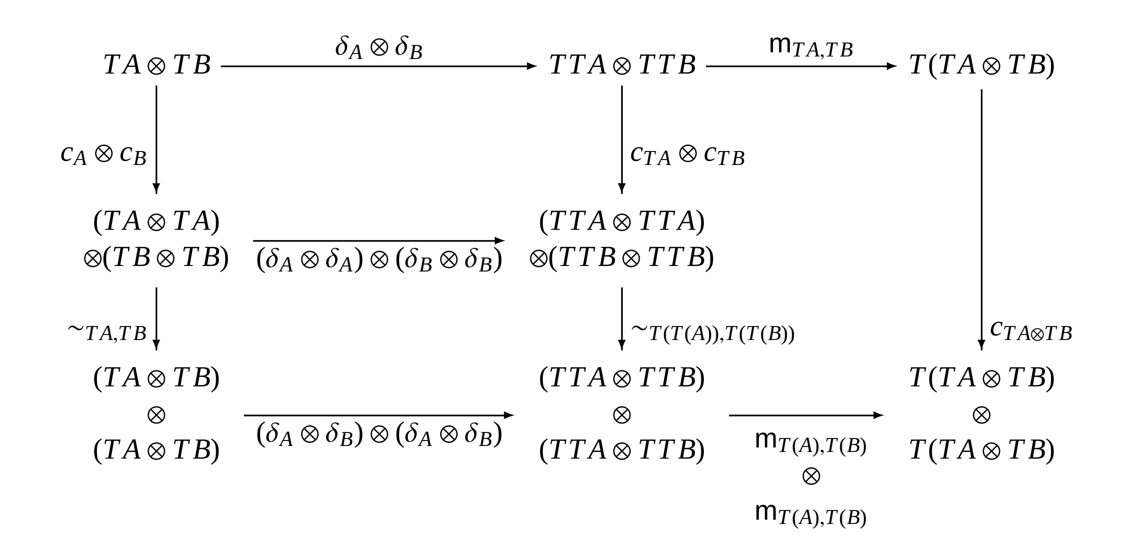
$$\begin{aligned}
\psi_{A,B} \circ \varphi_{A,B} &= (T(d_A \circ \rho_{TA} \circ (id_{TA} \otimes w_B)) \otimes T(d_B \circ \lambda_{TB} \circ (w_A \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ c_{TA\otimes TB} \circ \mathsf{m}_{TA,TB} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
&= (T(d_A \circ \rho_{TA} \circ (id_{TA} \otimes w_B)) \otimes T(d_B \circ \lambda_{TB} \circ (w_A \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ (\mathsf{m}_{TA,TB} \otimes \mathsf{m}_{TA,TB}) \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{TA,TB} \circ (c_A \otimes c_b) \\
&= (T(d_A \circ T(\rho_A) \circ \mathsf{m}_{A,I} \circ (id_{TA} \otimes (\mathsf{n} \circ w_B))) \\
&\quad \otimes T(d_B \circ T(\lambda_B) \circ \mathsf{m}_{B,I} \circ ((\mathsf{n} \circ w_A) \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ (\mathsf{m}_{TA,TB} \otimes \mathsf{m}_{TA,TB}) \circ ((\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)) \circ \sim_{TA,TB} \circ (c_A \otimes c_b) \\
&= ((T(d_A) \circ TT(\rho_A) \circ T(\mathsf{m}_{A,I}) \circ T(id_{TA} \otimes (\mathsf{n} \circ w_B)) \circ \mathsf{m}_{TA,TB} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \\
&\quad \otimes (T(d_B) \circ TT(\lambda_B) \circ T(\mathsf{m}_{B,I}) \circ T((\mathsf{n} \circ w_A) \otimes id_{TB}) \circ \mathsf{m}_{TA,TB} \circ (\delta_A \otimes \delta_B))) \\
&\quad \circ \sim_{TA,TB} \circ (c_A \otimes c_B) \\
&= ((T(id_A) \circ T(\rho_A) \circ \mathsf{m}_{A,I} \circ (id_{TA} \otimes (T(w_B) \circ \delta_B))) \\
&\quad \otimes (T(id_B) \circ T(\lambda_B) \circ \mathsf{m}_{I,B} \circ ((T(w_A) \circ \delta_A) \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
&= ((T(id_A \circ \rho_A) \circ \mathsf{m}_{A,I} \circ (id_{TA} \otimes (T(w_B) \circ \delta_B))) \\
&\quad \otimes (T(id_B \circ \lambda_B) \circ \mathsf{m}_{I,B} \circ ((T(w_A) \circ \delta_A) \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
&= ((T(\rho_A) \circ \mathsf{m}_{A,I} \circ (id_{TA} \otimes (\mathsf{n} \circ w_B))) \otimes (T(\lambda_B) \circ \mathsf{m}_{I,B} \circ ((\mathsf{n} \circ w_A) \otimes id_{TB}))) \\
&\quad \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
&= ((T(id_A) \circ \rho_{T(A)} \circ (id_{T(A)} \otimes w_B)) \otimes (T(id_B) \circ \lambda_{T(B)} \circ (w_A \otimes id_{T(B)}))) \\
&\quad \circ \sim_{T(A),T(B)} \circ (c_A \otimes c_B) \\
&\quad \text{(car } (T, \mathsf{m}, \mathsf{n}) \text{ est un semi-endofoncteur monoïdal de } (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)) \\
&= ((T(id_A) \circ \rho_{T(A)} \circ (id_{T(A)} \otimes w_A) \circ c_A) \otimes (T(id_B) \circ \lambda_{T(B)} \circ (w_B \otimes id_{T(B)}) \circ c_B)) \\
&= T(id_A) \otimes T(id_B) \ .
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.43. *Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, le diagramme*

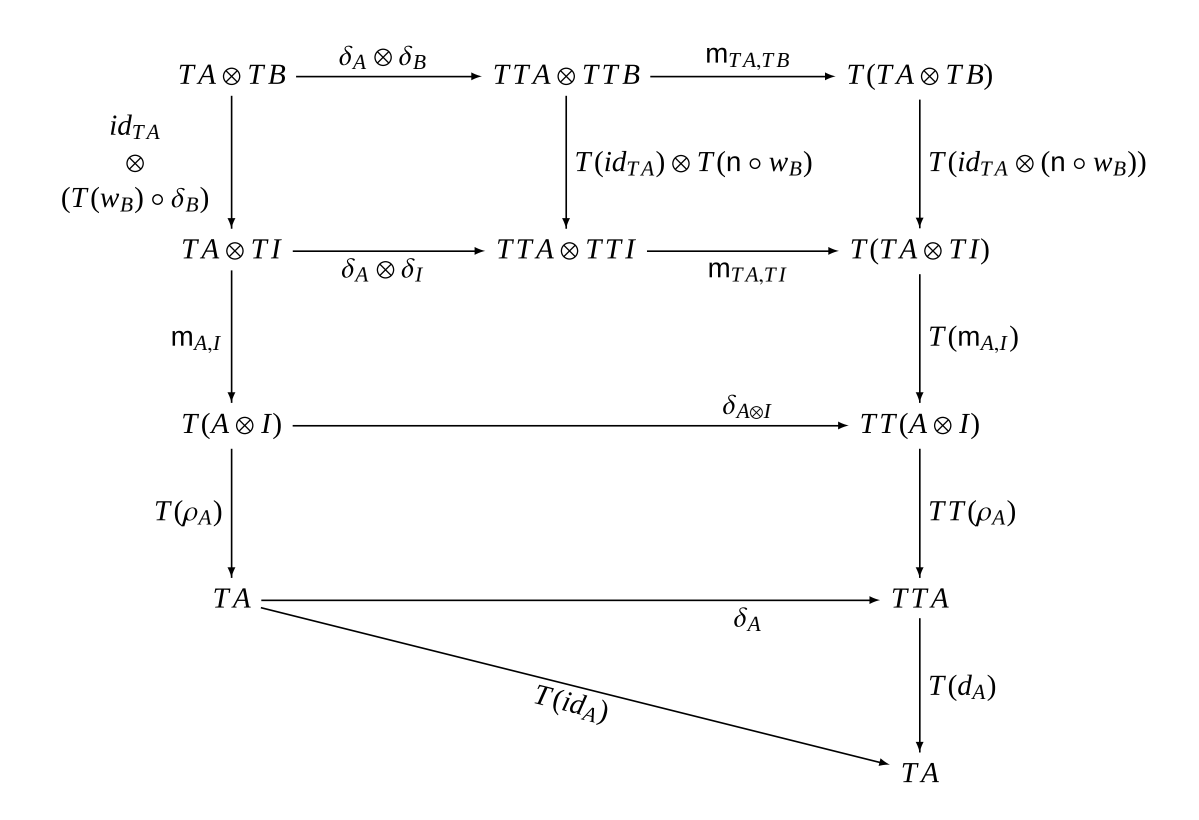


commute dans la catégorie $\mathbb{C}$.



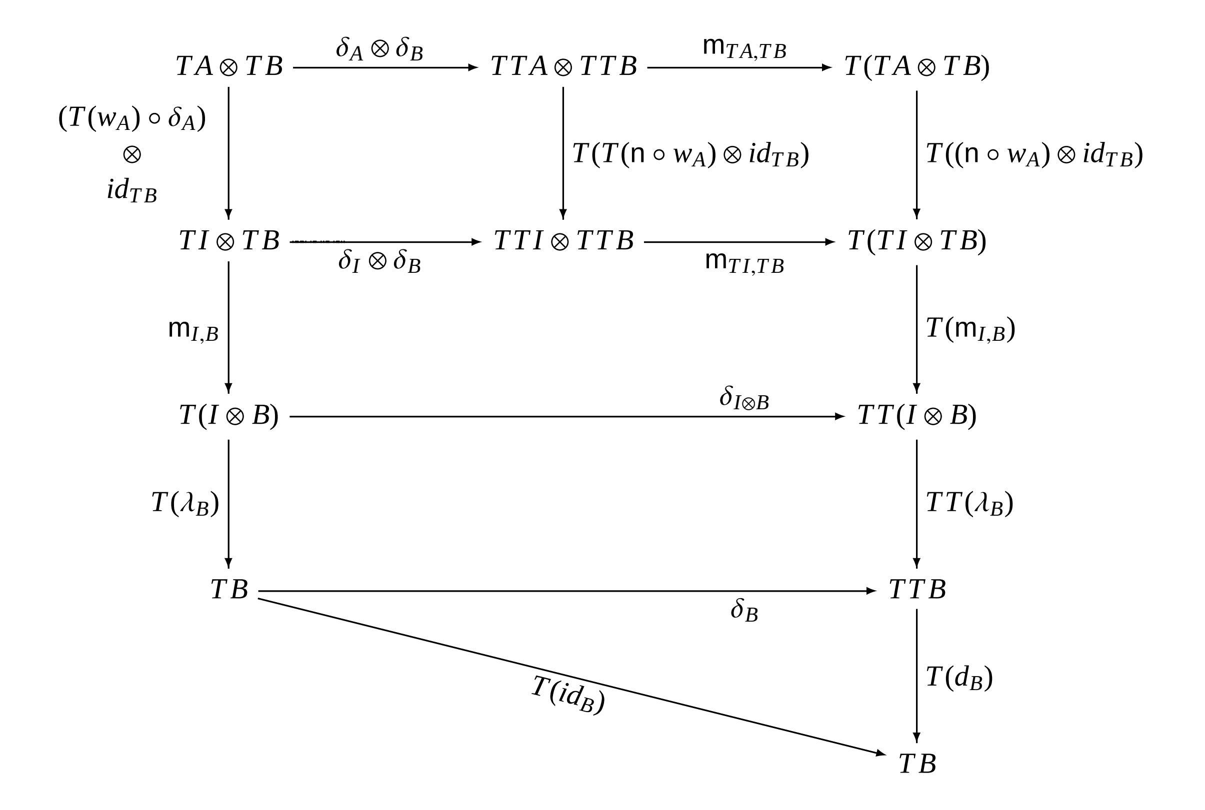
$TA \otimes TB$
$\delta_A \otimes \delta_B$
$TTA \otimes TTB$
$m_{TA,TB}$
$T(TA \otimes TB)$
$c_A \otimes c_B$
$c_{TA} \otimes c_{TB}$
$(TA \otimes TA)$
$\otimes(TB \otimes TB)$
$(\delta_A \otimes \delta_A) \otimes (\delta_B \otimes \delta_B)$
$(TTA \otimes TTA)$
$\otimes(TTB \otimes TTB)$
$\sim_{TA,TB}$
$\sim_{T(T(A)),T(T(B))}$
$c_{TA \otimes TB}$
$(TA \otimes TB)$
$\otimes$
$(TA \otimes TB)$
$(\delta_A \otimes \delta_B) \otimes (\delta_A \otimes \delta_B)$
$(TTA \otimes TTB)$
$\otimes$
$(TTA \otimes TTB)$
$m_{T(A),T(B)}$
$\otimes$
$m_{T(A),T(B)}$
$T(TA \otimes TB)$
$\otimes$
$T(TA \otimes TB)$

FIG. 3.5 –



$TA \otimes TB$
$\delta_A \otimes \delta_B$
$TTA \otimes TTB$
$m_{TA,TB}$
$T(TA \otimes TB)$
id_{TA}
$\otimes$
$(T(w_B) \circ \delta_B)$
$T(id_{TA}) \otimes T(n \circ w_B)$
$T(id_{TA} \otimes (n \circ w_B))$
$TA \otimes TI$
$\delta_A \otimes \delta_I$
$TTA \otimes TTI$
$m_{TA,TI}$
$T(TA \otimes TI)$
$m_{A,I}$
$T(m_{A,I})$
$T(A \otimes I)$
$\delta_{A \otimes I}$
$TT(A \otimes I)$
$T(\rho_A)$
$TT(\rho_A)$
TA
δ_A
TTA
$T(id_A)$
$T(d_A)$
TA

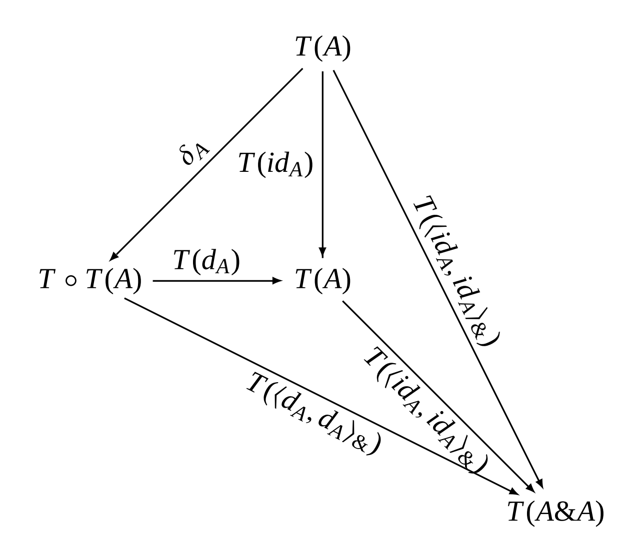
FIG. 3.6 –



$TA \otimes TB$
$\delta_A \otimes \delta_B$
$TTA \otimes TTB$
$\mathsf{m}_{TA,TB}$
$T(TA \otimes TB)$
$(T(w_A) \circ \delta_A) \otimes id_{TB}$
$T(T(\mathsf{n} \circ w_A) \otimes id_{TB})$
$T((\mathsf{n} \circ w_A) \otimes id_{TB})$
$TI \otimes TB$
$\delta_I \otimes \delta_B$
$TTI \otimes TTB$
$\mathsf{m}_{TI,TB}$
$T(TI \otimes TB)$
$\mathsf{m}_{I,B}$
$T(\mathsf{m}_{I,B})$
$T(I \otimes B)$
$\delta_{I \otimes B}$
$TT(I \otimes B)$
$T(\lambda_B)$
$TT(\lambda_B)$
TB
δ_B
TTB
$T(id_B)$
$T(d_B)$
TB

FIG. 3.7 –

Démonstration. Le diagramme



commute dans la catégorie $\mathbb{C}$ et l'on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,A}\circ c_A &= T(((d_A\circ\rho_{TA}\circ(id_{TA}\otimes w_A))\&(d_A\circ\lambda_{TA}\circ(w_A\otimes id_{TA})))\circ\langle id_{TA\otimes TA}, id_{TA\otimes TA}\rangle_\&) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{TA,TA}\circ(\delta_A\otimes\delta_A)\circ c_A \\
&= T(((d_A\circ\rho_{TA}\circ(id_{TA}\otimes w_A))\&(d_A\circ\lambda_{TA}\circ(w_A\otimes id_{TA})))\circ\langle id_{TA\otimes TA}, id_{TA\otimes TA}\rangle_\&) \\
&\quad \circ T(c_A)\circ\delta_A \\
&= T(((d_A\circ\rho_{TA}\circ(id_{TA}\otimes w_A))\&(d_A\circ\lambda_{TA}\circ(w_A\otimes id_{TA})))\circ\langle id_{TA\otimes TA}, id_{TA\otimes TA}\rangle_\&\circ c_A) \\
&\quad \circ\delta_A \\
&= T(((d_A\circ\rho_{TA}\circ(id_{TA}\otimes w_A))\&(d_A\circ\lambda_{TA}\circ(w_A\otimes id_{TA})))\circ(c_A\& c_A)\circ\langle id_{TA}, id_{TA}\rangle_\&) \\
&\quad \circ\delta_A \\
&= T(\langle d_A, d_A\rangle_\&)\circ\delta_A \quad .
\end{aligned}$$

□

3.3.4 Une autre interprétation du lambda-calcul

Le but de cette sous-section est de montrer qu'en présence des additifs, les catégories $\Lambda(\mathfrak{M})$ et $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$ sont (fortement) équivalentes (Théorème 3.3.46).

On note J le foncteur de $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$ vers $\Lambda(\mathfrak{M})$ qui assigne $\langle A\rangle$ à chaque objet A de $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$ et $\langle f\rangle$ à chaque flèche f de $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$.

On note K le foncteur de $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$ qui assigne $A_1\&\ldots\&A_m$ à chaque objet $\langle A_1,\ldots,A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$ et $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle_\&\circ\psi_{A_1,\ldots,A_m}$ à chaque flèche $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1,\ldots,A_m\rangle,\langle B_1,\ldots,B_n\rangle]$.

Pour tout objet $\langle A_1,\ldots,A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on pose $\varphi'_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} = \langle d_{\&_{j=1}^m A_j}\circ\varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}\rangle$.

Proposition 3.3.44. *$(K, J, \varphi', id_{id_{co\mathbb{C}_\mathbb{T}}})$ est une adjonction de $\Lambda(\mathfrak{M})$ vers $co\mathbb{C}_\mathbb{T}$.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord la naturalité de φ' de $id_{\Lambda(\mathfrak{M})}$ vers $J\circ K$.

Soit $f = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A_1, \ldots, A_m\rangle, \langle B_1, \ldots, B_n\rangle]$. On a

$$
\begin{aligned}
& (d_{\&_{i=1}^n B_i} \circ \varphi_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}) \circ_{\mathfrak{M}} \langle f_1, \ldots, f_n\rangle \\
= \;& d_{\&_{i=1}^n B_i} \circ \varphi_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(f_i) \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \;& d_{\&_{i=1}^n B_i} \circ T(\&_{i=1}^n f_i) \circ \varphi_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^m T(A_j), \ldots, \bigotimes_{j=1}^m T(A_j)\rangle}_{n \text{ fois}}} \circ c^n_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } \varphi) \\
= \;& d_{\&_{i=1}^n B_i} \circ T(\langle f_1, \ldots, f_n\rangle_\&) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par la Proposition 3.3.43)} \\
= \;& \langle f_1, \ldots, f_n\rangle_\& \circ d_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } d) \\
= \;& \langle f_1, \ldots, f_n\rangle_\& \\
& \text{(par le Lemme 3.3.17).}
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \circ T(d_{\&_{j=1}^m A_j} \circ \varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \;& \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \\
& \circ T(\&_{j=1}^m d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \circ \underbrace{\langle id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}, \ldots, id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}}_{m \text{ fois}}\rangle_\& \circ d_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}) \\
& \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par naturalité de } d) \\
= \;& \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \circ T(\&_{j=1}^m d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ T(\underbrace{\langle id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}, \ldots, id_{\bigotimes_{j=1}^m T(A_j)}}_{m \text{ fois}}\rangle_\&) \\
& \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
& \text{(par le Lemme 3.3.17)}
\end{aligned}
$$

$$= \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ \psi_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j),\ldots,\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\rangle}_{m \text{ fois}}} \circ T(\langle \underbrace{id_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)},\ldots,id_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)}}_{m \text{ fois}}\rangle_{\&})$$

$$\circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par la Proposition 3.3.42)

$$= \bigotimes_{j=1}^{m} T(d^j_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ \psi_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j),\ldots,\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\rangle}_{m \text{ fois}}}$$

$$\circ \varphi_{\underbrace{\langle \bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j),\ldots,\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)\rangle}_{m \text{ fois}}} \circ c^m_{\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j}$$

(par la Proposition 3.3.43)

$$= \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}) \circ_{\mathfrak{M}} \langle d^1_{\langle A_1,\ldots,A_l\rangle},\ldots,d^m_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}\rangle$$

(par la Proposition 3.3.42)

$$= \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})$$

(par le Lemme 3.3.19)

donc on a

$$\begin{aligned}
& (\langle f_1,\ldots,f_n\rangle_{\&} \circ \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ_{\mathfrak{M}} \varphi'_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \\
= {} & \langle f_1,\ldots,f_n\rangle_{\&} \circ \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \circ T(d_{\&_{j=1}^{m} A_j} \circ \varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\ldots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= {} & \langle f_1 \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j}),\ldots,f_n \circ \bigotimes_{j=1}^{m} T(id_{A_j})\rangle_{\&} \\
= {} & \langle f_1,\ldots,f_n\rangle_{\&} \ .
\end{aligned}$$

On en déduit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\langle A_1,\ldots,A_m\rangle & \xrightarrow{\varphi'_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}} & \langle \&_{j=1}^{m} A_j\rangle \\
\Big\downarrow f & & \Big\downarrow J \circ K(f) \\
\langle B_1,\ldots,B_n\rangle & \xrightarrow[\varphi'_{\langle B_1,\ldots,B_n\rangle}]{} & \langle \&_{i=1}^{n} B_i\rangle
\end{array}$$

commute dans la catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$.

De plus, pour tout objet A de $co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi'_{J(A)} & = & \varphi'_{\langle A\rangle} \\ & = & \langle d_A \circ \varphi_{\langle A\rangle}\rangle \\ & = & \langle d_A \circ T(id_A)\rangle \\ & = & \langle d_A\rangle \\ & = & (id_J)_A \quad . \end{array}$$

On a donc $\varphi' \circ id_J = id_J$, et donc

$$\begin{array}{rcl} (id_J \circ id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}}) \bullet (\varphi' \circ id_J) & = & (id_J \circ id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}}) \bullet id_J \\ & = & id_J \bullet id_J \\ & = & id_J \quad . \end{array}$$

Enfin, pour tout objet $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, on a

$$\begin{array}{rcl} K(\varphi'_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}) & = & K(\langle d_{\&_{j=1}^m A_j} \circ \varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}\rangle) \\ & = & d_{\&_{j=1}^m A_j} \circ \varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \circ \psi_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \\ & = & d_{\&_{j=1}^m A_j} \circ T(id_{\&_{j=1}^m A_j}) \\ & = & d_{\&_{j=1}^m A_j} \\ & = & (id_K)_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle} \end{array}$$

donc $(id_K \circ \varphi') = id_K$ et donc

$$\begin{array}{rcl} (id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}} \circ id_K) \bullet (id_K \circ \varphi') & = & (id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}} \circ id_K) \bullet id_K \\ & = & id_K \bullet id_K \\ & = & id_K \quad . \end{array}$$

□

Lemme 3.3.45. *Pour tout objet $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, $\varphi'_{\langle A_1,\ldots,A_m\rangle}$ est un isomorphisme de $\langle A_1, \ldots, A_m\rangle$ sur $\langle \&_{j=1}^m A_j\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. Soit $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle$ un objet de $\Lambda(\mathfrak{M})$. On pose

$$\varphi'_1 = d_{\&_{i=1}^n A_i} \circ \varphi_{A_1,\ldots,A_n}$$

et

$$\psi' = \langle \psi'_1, \ldots, \psi'_n\rangle \text{ avec } \psi'_i = d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n}) \quad .$$

$\psi'_i \circ T(id_{\&_{i=1}^n A_i}) = \psi'_i$ donc $\psi' \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle \&_{i=1}^n A_i\rangle, \langle A_1, \ldots, A_n\rangle]$.
On a $\psi' \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \varphi' = \langle h_1, \ldots, h_n\rangle$ avec

$$\begin{array}{rcl} h_i & = & \psi'_i \circ_{\mathfrak{M}} \langle \varphi'_1\rangle \\ & = & \psi'_i \circ T(\varphi'_1) \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\ & = & d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ T(d_{\&_{i=1}^n A_i} \circ \varphi_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n}) \\
&\quad \circ T((\&_{i=1}^n d_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\& \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\
&= d_{A_i} \\
&\quad \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n} \circ \&_{i=1}^n d^i_{A_1,\ldots,A_n} \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\& \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}) \\
&\quad \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\
&= d_{A_i} \circ T(d^i_{A_1,\ldots,A_n} \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i}) \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\
&= d^i_{A_1,\ldots,A_n} \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\
&\quad \text{(par naturalité de } d\text{)} \\
&= d^i_{A_1,\ldots,A_n} \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.17).}
\end{aligned}
$$

On a $\varphi' \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \psi' = \langle k_1 \rangle$ avec

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \varphi'_1 \circ \bigotimes_{i=1}^n T(\psi'_i) \circ c^n_{T\&_{i=1}^n A_i} \circ \delta_{\&_{i=1}^n A_i} \\
&= d_{\&_{i=1}^n A_i} \circ \varphi^n_{A_1,\ldots,A_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n T(d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n})) \circ c^n_{T\&_{i=1}^n A_i} \circ \delta_{\&_{i=1}^n A_i} \\
&= (\&_{i=1}^n d^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\& \circ d_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i} \circ \mathsf{m}_{TA_1,\ldots,TA_n} \circ \bigotimes_{i=1}^n \delta_{A_i} \\
&\quad \circ \bigotimes_{i=1}^n T(d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n})) \circ c^n_{T\&_{i=1}^n A_i} \circ \delta_{\&_{i=1}^n A_i} \\
&= (\&_{i=1}^n d^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\& \circ \bigotimes_{i=1}^n T(d_{A_i} \circ T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n})) \circ c^n_{T\&_{i=1}^n A_i} \circ \delta_{\&_{i=1}^n A_i} \\
&\quad \text{(par le Lemme 3.3.17)} \\
&= (\&_{i=1}^n d^i_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^n TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_\& \circ \bigotimes_{i=1}^n T(\pi^i_{A_1,\ldots,A_n} \circ d_{\&_{i=1}^n A_i}) \circ c^n_{T\&_{i=1}^n A_i} \circ \delta_{\&_{i=1}^n A_i} \\
&\quad \text{(par naturalité de } d\text{)}
\end{aligned}
$$

$$= \quad (\&_{i=1}^{n} d^{i}_{A_1,\ldots,A_n}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^{n} TA_i}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^{n} TA_i}}_{n \text{ fois}} \rangle_{\&} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(\pi^{i}_{A_1,\ldots,A_n}) \circ c^{n}_{\&_{i=1}^{n} A_i}$$

(δ est un morphisme de comonoïdes et (T, δ, d) est une comonade faible)

$$= \quad \&_{i=1}^{n}(d^{i}_{A_1,\ldots,A_n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} T(\pi^{i}_{A_1,\ldots,A_n})) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^{n} T\&_{j=1}^{n} A_j}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^{n} T\&_{j=1}^{n} A_j}}_{n \text{ fois}} \rangle_{\&} \circ c^{n}_{\&_{j=1}^{n} A_j}$$

$$= \quad \&_{i=1}^{n}(\pi^{i}_{A_1,\ldots,A_n} \circ d^{i}_{\underbrace{\&_{j=1}^{n} A_j, \ldots, \&_{j=1}^{n} A_j}_{n \text{ fois}}}) \circ \langle \underbrace{id_{\bigotimes_{i=1}^{n} T\&_{j=1}^{n} A_j}, \ldots, id_{\bigotimes_{i=1}^{n} T\&_{j=1}^{n} A_j}}_{n \text{ fois}} \rangle_{\&} \circ c^{n}_{\&_{j=1}^{n} A_j}$$

(par la Remarque 3.3.11)

$$= \quad \langle \pi^{1}_{A_1,\ldots,A_n} \circ d^{1}_{\underbrace{\&_{j=1}^{n} A_j, \ldots, \&_{j=1}^{n} A_j}_{n \text{ fois}}} \circ c^{n}_{\&_{j=1}^{n} A_j}, \ldots, \pi^{n}_{A_1,\ldots,A_n} \circ d^{n}_{\underbrace{\&_{j=1}^{n} A_j, \ldots, \&_{j=1}^{n} A_j}_{n \text{ fois}}} \circ c^{n}_{\&_{j=1}^{n} A_j} \rangle_{\&}$$

$$= \quad \langle \pi^{1}_{A_1,\ldots,A_n} \circ d_{\&_{i=1}^{n} A_i}, \ldots, \pi^{n}_{A_1,\ldots,A_n} \circ d_{\&_{i=1}^{n} A_i} \rangle_{\&}$$

(par le Lemme 3.3.18)

$$= \quad d_{\&_{i=1}^{n} A_i}$$

□

Théorème 3.3.46. $(K, J, \varphi', id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}})$ *est une équivalence adjointe de* $\Lambda(\mathfrak{M})$ *vers* $co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}$.

Démonstration. Par la Proposition 3.3.44, on sait que $(K, J, \varphi', id_{id_{co\mathbb{C}_{\mathbb{T}}}})$ est une adjonction et, par le Lemme 3.3.45, on sait que, pour tout objet $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ de $\Lambda(\mathfrak{M})$, $\varphi_{\langle A_1,\ldots,A_m \rangle}$ est un isomorphisme de $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ sur $K \circ J(\langle A_1, \ldots, A_m \rangle)$. □

Chapitre 4

Qu'est-ce qu'un modèle des réseaux différentiels ?

Les réseaux différentiels ont été introduits par Ehrhard et Régnier dans [23]. Ils proviennent de la considération d'un modèle de la logique linéaire, les espaces de finitude (voir [21]), dans lesquels les connecteurs aditifs "avec" et "plus", ainsi que leurs unités respectives, sont interprétés de la même manière. Or il est bien connu qu'une catégorie avec un objet nul et des produits finis et des coproduits finis dans laquelle les produits finis et les coproduits finis coïncident est enrichie sur la catégorie monoïdale des monoïdes commutatifs (voir [40], chapitre VIII) : cela signifie que l'on peut sommer (finiment) des morphismes et que la composition est distributive sur l'addition. D'où l'idée de considérer une syntaxe dans laquelle on peut également faire des sommes. Cette syntaxe est celle des *réseaux différentiels*.

Les *réseaux simples* sont construits à partir

– des nœuds des réseaux de MLL ;
– des nœuds affaiblissement, déréliction et contraction de MELL ;
– et des noeuds co-affaiblissement, co-déréliction et co-contraction, symétriques des précédents.

Les réseaux différentiels sont des sommes finies de réseaux simples. Contrairement aux réseaux de la logique linéaire, il n'y a donc plus de boîte pour l'introduction du " !". Les réseaux corrects sont ceux satisfaisant un critère qui étend celui de Danos-Régnier ([18]), pour lequel les nœuds "contraction" se comportent comme les nœuds "par" et les nœuds "cocontraction" comme les nœuds "tenseur".

On verra, au chapitre suivant, que l'on peut voir les réseaux différentiels comme une décomposition de la logique linéaire.

Pour l'instant, de même qu'au chapitre 3 on a cherché une interprétation catégorique de la logique linéaire dans les catégories, de même, ici, on cherche une interprétation catégorique des réseaux différentiels. Une notion fondamentale pour faire cela est la notion de *bigèbre*. Avant de donner une réponse à ce problème, on commencera donc par rappeler ce que recouvre cette notion.

4.1 Bigèbres

Cette section contient beaucoup de matériel classique, que l'on peut trouver, par exemple, dans le Chapitre III de [15].

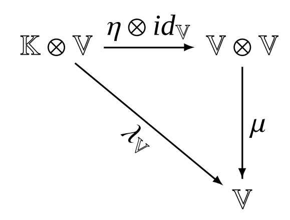
Définition 4.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-algèbre) un $\mathbb{K}$-module $\mathbb{V}$ muni d'une application $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$.*

L'application linéaire qui intervient dans cette définition est appelée la *multiplication* dans l'algèbre. On dira que l'algèbre est *associative* si la multiplication dans l'algèbre est associative, autrement dit, si le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{V}\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{V},\mathbb{V},\mathbb{V}}} & (\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})\otimes\mathbb{V} & \xrightarrow{\mu\otimes id_{\mathbb{V}}} & \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} \\ \downarrow{\scriptstyle id_{\mathbb{V}}\otimes\mu} & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} & & \xrightarrow[\mu]{\hspace{6em}} & & \mathbb{V} \end{array}$$

où μ est la multiplication et α est l'isomorphisme de l'associativité du produit tensoriel.

On appelle *algèbre unifère* sur $\mathbb{K}$ un $\mathbb{K}$-module $\mathbb{V}$ muni non seulement d'une multiplication μ, mais, en outre, d'une application $\mathbb{K}$-linéaire η de $\mathbb{K}$ vers $\mathbb{V}$ telle que les deux diagrammes



et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} & \xleftarrow{id_{\mathbb{V}}\otimes\eta} & \mathbb{V}\otimes\mathbb{K} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow{\scriptstyle \rho_{\mathbb{V}}} & \\ \mathbb{V} & & \end{array}$$

commutent dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules, où λ et ρ sont les isomorphismes naturels exprimant la neutralité de $\mathbb{K}$ pour le produit tensoriel.

Une algèbre unifère associative n'est donc rien d'autre qu'un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-modules.

Exemple 4.1.2. *Etant donnés un anneau commutatif $\mathbb{K}$ et un monoïde G, on peut former* l'algèbre de monoïde $\mathbb{K}[G]$. *$\mathbb{K}[G]$ est formé par l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{K}$ presque partout nulles, les éléments de $\mathbb{K}[G]$ peuvent donc s'écrire $\sum_{g\in G}\lambda_g\cdot g$ avec $\lambda_g = 0$ pour tous les éléments g de G, sauf un nombre fini d'entre eux ; l'addition est induite par celle de l'anneau $\mathbb{K}$ et la multiplication définie ainsi :*

$$(\sum_{g\in G}\lambda_g\cdot g)(\sum_{h\in G}\mu_h\cdot h) = \sum_{g,h\in G}(\lambda_g\mu_g)\cdot(gh) \quad .$$

$\mathbb{K}[G]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre unifère associative. La fonction qui à un monoïde donne l'algèbre de monoïde $\mathbb{K}[G]$ se prolonge en un foncteur de la catégorie des monoïdes vers la catégorie $\mathbf{Alg}_{\mathbb{K}}$ *des $\mathbb{K}$-algèbres unifères associatives ; c'est un adjoint à gauche du foncteur d'oubli.*

Exemple 4.1.3. *Soient $\mathbb{K}$ un anneau commutatif et $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-module. On pose $T^0(\mathbb{V}) = \mathbb{K}$, $T^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$ et, pour $n \geq 1$, $T^{n+1}(\mathbb{V}) = T^n(\mathbb{V})\otimes\mathbb{V}$. Notons $T(\mathbb{V}) = \oplus_{n\in\mathbb{N}}T^n(\mathbb{V})$. Nous allons définir sur $T(\mathbb{V})$ une structure de $\mathbb{K}$-algèbre associative unifère. On définit, pour tous entiers m et n, une application*

$\mathbb{K}$-linéaire $\mu_{m,n}$ de $T^m(\mathbb{V}) \otimes T^n(\mathbb{V})$ vers $T^{m+n}(\mathbb{V})$: $\mu_{0,n} = \lambda_{T^n(\mathbb{V})}$, $\mu_{m,0} = \rho_{T^m(\mathbb{V})}$ et, si m et n sont non nuls, $\mu_{m,n} = \alpha_{\mathbb{V}}^{(m,n),m+n}$. Cela induit une application $\mathbb{K}$-linéaire μ de $T(\mathbb{V}) \otimes T(\mathbb{V})$ vers $T(\mathbb{V})$. On définit une application $\mathbb{K}$-linéaire η de $\mathbb{K}$ vers $T(\mathbb{V})$ en posant $\eta(1) = \iota_0(1)$, où ι_0 est l'injection canonique de $T^0(\mathbb{V})$ vers $T(\mathbb{V})$. Le triplet $(T(\mathbb{V}), \mu, \eta)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre unifère associative, appelée algèbre tensorielle de $\mathbb{V}$.

On peut montrer que l'algèbre tensorielle a la propriété suivante : si on note U le foncteur d'oubli de la catégorie **Alg**$_{\mathbb{K}}$ *des $\mathbb{K}$-algèbres unifères associatives vers la catégorie* **Mod**$_{\mathbb{K}}$ *des $\mathbb{K}$-modules, alors pour tout $f \in$* ***Mod***$_{\mathbb{K}}[\mathbb{V}, U(H)]$*, il existe un unique $T(f) \in$* **Alg**$_{\mathbb{K}}[T(\mathbb{V}), H]$ *tel que $f = U(T(f)) \circ \iota_{\mathbb{V}}$, où $\iota_{\mathbb{V}}$ est l'injection canonique de $\mathbb{V}$ vers $T(\mathbb{V})$.*

Naturellement, un morphisme d'algèbres unifères est un morphisme de monoïdes dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-modules.

La catégorie **Mon**(C) des monoïdes d'une catégorie monoïdale symétrique $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ peut elle-même être munie d'une structure monoïdale symétrique. Etant donnés deux monoïdes $H_1 = (\mathbb{V}_1, \mu_1, \eta_1)$ et $H_2 = (\mathbb{V}_2, \mu_2, \eta_2)$, on pose $\mu = (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ \sim_{H_1,H_2}$ et $\eta = (\eta_1 \otimes \eta_2) \circ \lambda_I$, où I est l'unité de la catégorie monoïdale symétrique, à savoir le $\mathbb{K}$-module $\mathbb{K}$ dans le cas où l'on considère les $\mathbb{K}$-modules ; $((\mathbb{V}_1 \otimes \mathbb{V}_2), \mu, \eta)$ est un monoïde. De plus, α, λ, ρ, et γ étant eux-mêmes des morphismes de monoïdes, (**Mon**(C), $\otimes$, (I, ρ_I, id_I), α, λ, ρ, γ) est une catégorie monoïdale symétrique.

De manière duale, une cogèbre coünifère coassociative est un comonoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-modules, un morphisme de cogèbres unifères est un morphisme de comonoïdes dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-modules et on peut munir la catégorie des comonoïdes d'une catégorie monoïdale symétrique d'une structure monoïdale symétrique.

Exemple 4.1.4. *Soient $\mathbb{K}$ un anneau commutatif et $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-module. Nous allons définir sur $T(\mathbb{V})$, défini dans l'exemple 4.1.3, une structure de $\mathbb{K}$-cogèbre coassociative coünifère. On définit une application $\mathbb{K}$-linéaire Δ de $T(\mathbb{V})$ vers $T(\mathbb{V}) \otimes T(\mathbb{V})$ en posant, pour tout entier n,*

$$\Delta(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} ((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes (x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)})) \ ,$$

où $\mathfrak{S}_{p,n-p}$ est l'ensemble des permutations σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ telles que σ est croissante sur les intervalles $[1, p]$ et $[p+1, n]$. On définit une application A-linéaire ϵ de $T(\mathbb{V})$ vers A en posant :

$$\epsilon(v) = \begin{cases} 0 & si\ v \notin \iota_0(T^0(\mathbb{V})) \\ \iota_0^{-1}(v) & sinon, \end{cases}$$

où ι_0 est l'injection canonique de $T^0(\mathbb{V})$ vers $T(\mathbb{V})$. Le triplet $(T(\mathbb{V}), \Delta, \epsilon)$ est une $\mathbb{K}$-cogèbre coünifère coassociative.

Sur un même $\mathbb{K}$-module, on peut donc définir à la fois une structure de $\mathbb{K}$-algèbre et une structure de $\mathbb{K}$-cogèbre. En quel sens peut-on dire qu'elles cohabitent ?

Théorème 4.1.5. *Soit $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ une catégorie monoïdale symétrique, soit $(\mathbb{V}, \mu, \eta)$ un monoïde dans C et soit $(\mathbb{V}, \Delta, \epsilon)$ un comonoïde dans C. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Les morphismes μ et η sont des morphismes de comonoïdes (au sens où $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ est muni de la structure de comonoïde définie ci-dessus).

(ii) Les morphismes Δ et ϵ sont des morphismes de monoïdes (au sens où $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ est muni de la structure de monoïde définie ci-dessus).

Démonstration. Par définition, dire que μ est un morphisme de comonoïdes signifie que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathbb{V} \\ {\scriptstyle \sim_{\mathbb{V},\mathbb{V}}\circ(\Delta\otimes\Delta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ (\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}) & \xrightarrow[\mu\otimes\mu]{} & \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} \end{array} \tag{1}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} & \xrightarrow{\quad\mu\quad} & \mathbb{V} \\ & {\scriptstyle \rho_I^{-1}\circ(\epsilon\oplus\epsilon)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\epsilon} & \\ & I & \end{array} \tag{2}$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Par définition, dire que η est un morphisme de comonoïdes signifie que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad\eta\quad} & \mathbb{V} \\ {\scriptstyle\rho_I^{-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta} \\ I\otimes I & \xrightarrow[\eta\otimes\eta]{} & \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} \end{array} \tag{3}$$

et

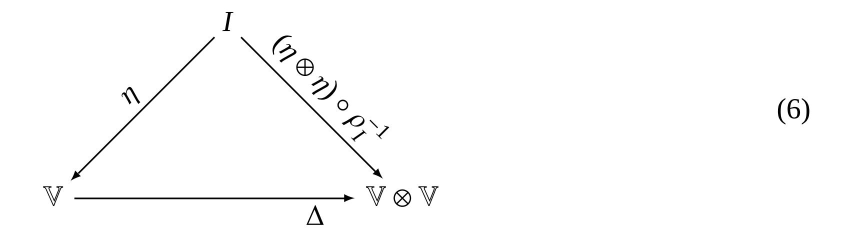
$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\quad\eta\quad} & \mathbb{V} \\ & {\scriptstyle id_I}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\epsilon} & \\ & I & \end{array} \tag{4}$$

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Par définition, dire que Δ est un morphisme de monoïdes signifie que les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} & \xrightarrow{\Delta\otimes\Delta} & (\mathbb{V}\otimes\mathbb{V})\otimes(\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}) \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\mu\otimes\mu)\circ\sim_{\mathbb{V},\mathbb{V}}} \\ \mathbb{V} & \xrightarrow[\Delta]{} & \mathbb{V}\otimes\mathbb{V} \end{array} \tag{5}$$

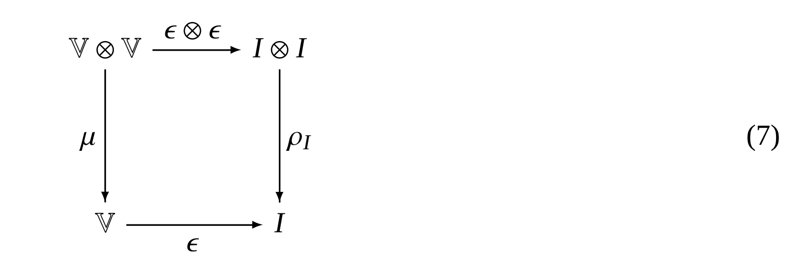
et



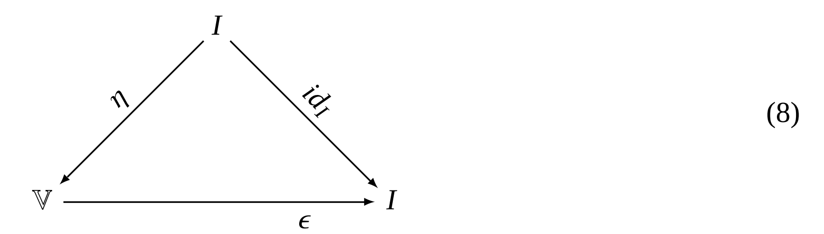
(6)

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Par définition, dire que ϵ est un morphisme de monoïdes signifie que les deux diagrammes



(7)



(8)

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Les quatre premiers diagrammes sont exactement les mêmes que les quatre derniers. □

Ceci justifie la définition suivante.

Définition 4.1.6. *Soit C une catégorie monoïdale symétrique. Une bigèbre dans C est un quintuplet $(\mathbb{V}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, où $(\mathbb{V}, \mu, \eta)$ est un monoïde dans C et $(\mathbb{V}, \Delta, \epsilon)$ est un comonoïde dans C vérifiant les conditions équivalentes du théorème 4.1.5.*

μ est la multiplication *de $(\mathbb{V}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ et Δ est la* comultiplication *de $(\mathbb{V}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$.*

Si, dans cette définition, on prend pour C la catégorie monoïdale symétrique des $\mathbb{K}$-modules, on retrouve le notion de bigèbre au sens classique.

Exemple 4.1.7. *Etant donnée une algèbre de monoide $\mathbb{K}[G]$, on peut définir une comultiplication Δ en posant $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in G$ et une coünité ϵ en posant $\epsilon(g) = 1_{\mathbb{K}}$ pour tout $g \in G$. Cela donne une bigèbre.*

Exemple 4.1.8. *Soient $\mathbb{K}$ un anneau commutatif et $\mathbb{V} = (V, \ldots)$ un $\mathbb{K}$-module. Le 5-uplet $(T(\mathbb{V}), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$, où $T(\mathbb{V})$, μ, η, Δ et ϵ sont tels que dans les exemples 4.1.3 et 4.1.4, est une bigèbre. En effet, vérifions que Δ est un morphisme d'algèbres. On sait qu'il existe un unique morphisme d'algèbres unifères Δ' de $T(\mathbb{V})$ vers $T(\mathbb{V}) \otimes T(\mathbb{V})$ tel que pour tout $x \in V$, $\Delta'(x) = (1 \otimes x) + (x \otimes 1)$. On montre alors, par induction sur n, que $\Delta'(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \Delta(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$:*

$$\Delta'(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) \quad = \quad (\Delta' \circ \mu)((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes x_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= ((\mu \otimes \mu) \circ \sim_{T(\mathbb{V}),T(\mathbb{V})} \circ (\Delta' \otimes \Delta'))((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes x_{n+1}) \\
&= ((\mu \otimes \mu) \circ \sim_{T(\mathbb{V}),T(\mathbb{V})})(\Delta'(x_1 \otimes \ldots x_n) \otimes \Delta'(x_{n+1})) \\
&= ((\mu \otimes \mu) \circ \sim_{T(\mathbb{V}),T(\mathbb{V})})(\Delta(x_1 \otimes \ldots x_n) \otimes \Delta'(x_{n+1})) \\
&= ((\mu \otimes \mu) \circ \sim_{T(\mathbb{V}),T(\mathbb{V})}) \\
&\quad (\sum_{p=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} ((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes (x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)})), \\
&\quad (1 \otimes x_{n+1}) + (x_{n+1} \otimes 1)) \\
&= (\mu \otimes \mu)(\sum_{p=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} \\
&\quad ((((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes 1) \otimes ((x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}) \otimes x_{n+1})) \\
&\quad +(((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes x_{n+1}) \otimes ((x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}) \otimes 1)))) \\
&= \sum_{p=0}^{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p,n-p}} \\
&\quad (((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(p)}) \otimes (x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)} \otimes x_{n+1})) \\
&\quad +((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots x_{\sigma(p)} \otimes x_{n+1}) \otimes (x_{\sigma(p+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}))) \\
&= \sum_{q=0}^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{q,n+1-q}} ((x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(q)}) \otimes (x_{\sigma(q+1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n+1)})) \\
&= \Delta(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+1})
\end{aligned}
$$

.

La catégorie **Rel** peut aussi être munie d'une structure monoïdale symétrique $\mathcal{R}$ (le tenseur est le produit cartésien ensembliste et l'unité est le singleton $I = \{*\}$). On peut donc aussi parler de bigèbres dans $\mathcal{R}$. On en donne un exemple en s'inspirant de l'Exemple 4.1.8.

Exemple 4.1.9. *Soit A un ensemble. On note μ_A le morphisme de $A^{<\omega} \otimes_{\mathcal{R}} A^{<\omega}$ vers $A^{<\omega}$ dans la catégorie **Rel** défini par*

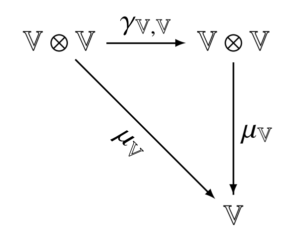
$$\mu_A = \{((\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle, \langle \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n} \rangle), \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n} \rangle) \; ; \; m, n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i \, (1 \leq i \leq m+n \Rightarrow \alpha_i \in A)\} \; .$$

*On note η_A le morphisme de I vers $A^{<\omega}$ dans la catégorie **Rel** défini par $\eta_A = \{(*, \langle\rangle)\}$. On note Δ_A le morphisme de $A^{<\omega}$ vers $A^{<\omega} \otimes_{\mathcal{R}} A^{<\omega}$ défini par*

$$
\begin{aligned}
\Delta_A = \{ \quad & (\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+q} \rangle, (\langle \alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p)} \rangle, \langle \alpha_{\sigma(p+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(p+q)} \rangle)) \; ; \\
& p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i (1 \leq i \leq p+q \Rightarrow \alpha_i \in A) \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_{p,q}\} \; .
\end{aligned}
$$

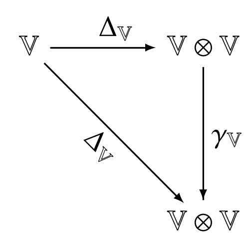
*On note ϵ_A le morphisme de $A^{<\omega}$ vers I dans **Rel** défini par $\epsilon_A = \{(\langle\rangle, *)\}$. Le 5-uplet $(A^{<\omega}, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A)$ est une bigèbre dans $\mathcal{R}$.*

Une bigèbre $(\mathbb{V}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est dit *commutative* si le monoïde $(\mathbb{V}, \mu, \eta)$ est commutatif, c'est-à-dire si le diagramme



commute dans la catégorie $\mathbb{C}$.

De manière duale, une bigèbre $(\mathbb{V}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est dite *cocommutative* si le comonoïde $(\mathbb{V}, \Delta, \epsilon)$ est cocommutatif, c'est-à-dire si le diagramme



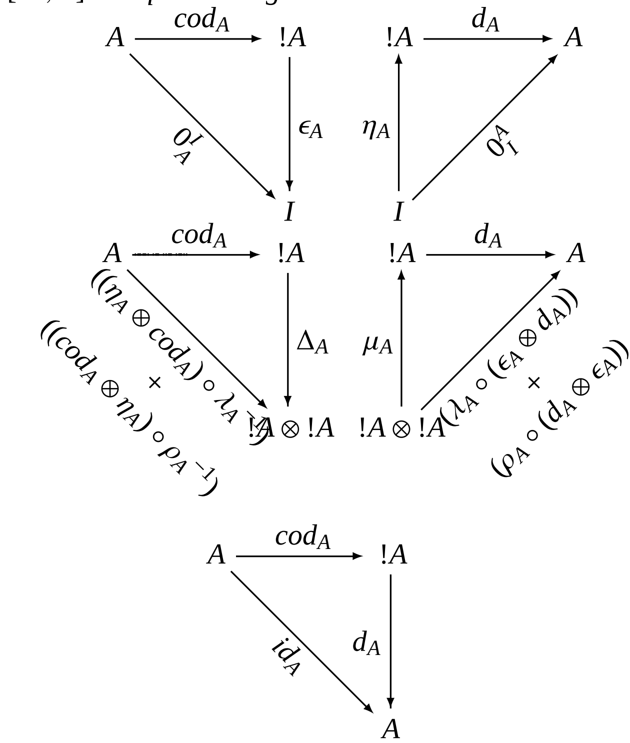
commute dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Les Exemples 4.1.2, 4.1.8 et 4.1.9 sont tous les trois des exemples de bigèbres cocommutatives. Les bigèbres de l'Exemple 4.1.2 ne sont pas commutatives si le monoïde de départ n'est pas commutatif. Celles de l'Exemple 4.1.8 (respectivement celles de l'Exemple 4.1.9) ne sont jamais commutatives, à moins que la dimension du k-espace vectoriel de départ (respectivement le cardinal de l'ensemble de départ) ne soit strictement inférieure à 2.

4.2 Interpréter les réseaux différentiels

Définition 4.2.1. *Un modèle des réseaux différentiels est un couple* $((C, *), (T_A)_{A \in ob(C)})$*, où*

- $(C, \perp) = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma, \perp)$ *est la catégorie* $*$*-autonome sous-jacente à une catégorie* $*$*-autonome enrichie sur la catégorie monoïdale des monoïdes commutatifs ;*
- $T_A = (!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A, cod_A, d_A)$*, où* $(!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A)$ *est une bigèbre dans* C*,* $cod_A \in \mathbb{C}[A, !A]$ *et* $d_A \in \mathbb{C}[!A, A]$ *tels que les diagrammes*



et

commutent dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Lorsqu'on aura un modèle $(C, (T_A)_{A \in ob(C)})$ avec $T_A = (!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A, cod_A, d_A)$, on interprétera la cocontraction par la multiplication, le coaffaiblissement par l'unité, la contraction par la comultiplication et l'affaiblissment par la coünité. C'est pourquoi on posera $coc_A = \mu_A$, $cow_A = \eta_A$, $c_A = \Delta_A$ et $w_A = \epsilon_A$.

Exemple 4.2.2. *La catégorie $*$-autonome $(\mathcal{R}, \perp) = (\textbf{\textit{Rel}}, \ldots)$ ($\perp = I = \{*\}$) est enrichie sur la catégorie monoïdale des monoïdes commutatifs : on prend pour la somme la réunion. Pour $T_A = (!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A; \epsilon_A, cod_A, d_A)$, on pose*
- $!A = A^{<\omega}$;
- *μ_A, η_A, Δ_A et ϵ_A sont tels que définis dans l'Exemple 4.1.9 ;*
- *cod_A est le morphisme de A vers $!A$ dans la catégorie **Rel** défini par $cod_A = \{(\alpha, \langle\alpha\rangle) \ ; \ \alpha \in A\}$ et d_A est le morphisme de $!A$ vers A dans la catégorie **Rel** défini par $d_A = \{(\langle\alpha\rangle, \alpha) \ ; \ \alpha \in A\}$.*

On peut faire un certain nombre de remarques au sujet de cette définition :
- on n'a supposé ni la commutativité ni la cocommutativité des bigèbres ;
- les modèles des réseaux différentiels sont complètement symétriques ;
- ils sont définis de manière locale : l'interprétation de $!A$, de c_A, coc_A, etc... est définie formule par formule ; rien n'empêche, par exemple, que, pour une certaine formule A, c_A soit cocommutative et que pour une autre formule B, c_B ne soit pas cocommutative...

Ces remarques amènent à la proposition suivante.

Proposition 4.2.3. *Soit $(C, (T_A)_{A \in ob(C)})$ un modèle des réseaux différentiels, avec*

$$C = ((\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma), \perp)$$

et

$$T_A = (!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A, cod_A, d_x) \ .$$

Alors $(C, (T'_A)_{A \in ob(C)})$ est un modèle des réseaux différentiels avec $T'_A = (!A, \mu'_A, \eta'_A, \Delta'_A, \epsilon'_A, cod'_A, d'_x)$, où
- *μ'_A est μ_A ou $\mu_A \circ \gamma_{!A,!A}$, Δ'_A est Δ_A ou $\gamma_{!A,!A} \circ \Delta_A$, $\eta'_A = \eta_A$, $\epsilon'_A = \epsilon_A$, $cod'_A = cod_A$ et $d'_A = d_A$;*
- *ou bien, dans le cas où $C = (\mathcal{R}, \perp) = (\textbf{\textit{Rel}}, \ldots)$, $\mu'_A = {\Delta_A}^*$, $\eta'_A = {\epsilon_A}^*$, $\Delta'_A = {\mu_A}^*$, $cod'_A = {d_A}^*$ et $d'_A = {cod_A}^*$, où, lorsque $f \in \textbf{\textit{Rel}}[A, B]$, f^* est le morphisme de B vers A dans la catégorie **Rel** défini par $f^* = \{(\beta, \alpha) \ ; \ (\alpha, \beta) \in f\}$.*

Si toutes les bigèbres sont cocommutatives (respectivement commutatives), on dira que le modèle des réseaux différentiels est *cocommutatif* (respectivement *commutatif*). L'Exemple 4.2.2 est un exemple de modèle cocommutatif des réseaux différentiels, qui n'est pas commutatif.

Chapitre 5

Des réseaux différentiels à la logique linéaire

L'objectif de ce chapitre est de montrer qu'à partir d'un modèle des réseaux différentiels (voir Chapitre 4), moyennant quelques hypothèses supplémentaires, on peut obtenir un modèle de la logique linéaire et un modèle du lambda-calcul simplement typé (voir Chapitre 3) en passant par la formule de Taylor-Ehrhard, qui traduit une boîte promotion dans les réseaux différentiels (voir Définition 5.2.14). L'une de ces hypothèses consiste en la possibilité de définir des séries de morphismes à coefficients réels positifs. Formellement, cela signifie que la catégorie monoïdale symétrique fermée dans laquelle on interprète les réseaux différentiels est enrichie dans une catégorie monoïdale symétrique adéquate. La section 5.1 exhibe une telle catégorie monoïdale symétrique.

5.1 Préliminaires (semi-)algébriques

La solution adoptée peut paraître un peu grossière. En effet, au lieu de demander que seules certaines séries convergent (et, effectivement, on n'a besoin seulement que *certaines* séries convergent), on va demander que *toutes* les séries soient définies. Cela simplifie la question (pas de problème de topologie). Pour autant, on verra que, même ainsi, on capture des modèles intéressants. De plus, cette solution est des plus naturelles. Elle présente des similitudes avec ce que l'on fait habituellement en théorie de la mesure.

5.1.1 Monoïdes et semi-anneaux dénombrablement complets

La notion de monoïde (dénombrablement) complet, qui consiste essentiellement en un monoïde sur lequel on peut faire des sommes (dénombrablement) infinies, a été introduite par Krob dans [36].

Définition 5.1.1 ([36]). *Soit* $(M, +, 0)$ *un monoïde commutatif. On dit que* $(M, +, 0, \sum)$ *est un monoïde dénombrablement complet si pour tout ensemble dénombrable* I*,* $\sum_I$ *est une application de* M^I *vers* M *de sorte que les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *pour tout* $\nu \in M^{\emptyset}$, $\sum_{\emptyset} \nu = 0$ *;*
- *pour tout singleton* $I = \{\alpha\}$*, pour tout* $\nu \in M^I$, $\sum_I \nu = \nu(\alpha)$ *;*
- *pour toute paire* $I = \{\alpha_1, \alpha_2\}$*, pour tout* $\nu \in M^I$, $\sum_I \nu = \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2)$ *;*
- *pour tout ensemble dénombrable* I*, pour tout* $\nu \in M^I$ *et pour toute partition* $(J_j)_{j\in J}$ *de* I*, on a* $\sum_I \nu = \sum_J g$*, où* g *est la fonction de* J *vers* M *définie par* $g(j) = \sum_{J_j} \nu_{|J_j}$.

On écrira aussi $\sum_{i \in I} v(i)$ au lieu de $\sum_I v$.

Exemple 5.1.2. *$\overline{\mathbb{R}_+} = (R_+ \cup \{\infty\}, +, 0, \sum)$, où R_+ est l'ensemble des réels positifs, est un monoïde dénombrablement complet si on pose*

$$\sum_I v = sup\{\sum_J v_{|J} \ ; \ J \subseteq I \text{ et } J \text{ fini}\} \ .$$

La notion de semi-anneau (dénombrablement) complet a également été introduite par Krob : pour l'essentiel, c'est un semi-anneau dans lequel on peut faire des sommes (dénombrablement) infinies.

Définition 5.1.3 ([36]). *Soit $(K, +, 0, \times, 1)$ un semi-anneau. On dit que $(K, +, 0, \sum, \times, 1)$ est un semi-anneau dénombrablement complet si*

- *$(K, +, 0, \sum)$ est un monoïde dénombrablement complet ;*
- *et pour tout ensemble dénombrable I, pour tout $v \in K^I$, pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \times (\sum_I f) = \sum_I (\lambda \times f)$ et $(\sum_I f) \times \lambda = \sum_I (f \times \lambda)$.*

Exemple 5.1.4. *L'Exemple 5.1.2 se prolonge naturellement en semi-anneau dénombrablement complet, que l'on notera encore $\overline{\mathbb{R}_+}$.*

5.1.2 Semi-modules dénombrablement complets

A partir de maintenant, $\mathbb{K} = (K, +_K, 0_K, \sum, \times, 1)$ désigne un semi-anneau dénombrablement complet.

Définition 5.1.5 ([36]). *On dit que $(V, +_V, 0_V, \sum, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet si*

- *$(V, +_V, 0_V, \sum, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-semi-module ;*
- *$(V, +_V, 0_V, \sum)$ est un monoïde dénombrablement complet ;*
- *pour tout $\lambda \in K$, pour tout ensemble dénombrable I, pour tout $v \in V^I$, $\lambda \cdot (\sum_I v) = \sum_I (\lambda \cdot v)$;*
- *pour tout ensemble dénombrable I, pour tout $\mu \in K^I$, pour tout $v \in V$, on a*

$$(\sum_{i \in I} \mu(i)) \cdot v = \sum_{i \in I} (\mu(i) \cdot v) \ .$$

Exemple 5.1.6. *Soient A et B deux ensembles. Pour tout $v \in \mathcal{P}(A \times B)^I$, on pose $\sum_I v = \bigcup\{v(i) ; i \in I\}$. Pour tout $f \in \mathcal{P}(A \times B)$, pour tout $\lambda \in R_+ \cup \{\infty\}$, on pose*

$$\lambda \cdot f = \begin{cases} \emptyset & si \ \lambda = 0 \ ; \\ f & sinon. \end{cases}$$

$(\mathcal{P}(A \times B), \cup, \emptyset, \sum, \cdot)$ est un $\overline{\mathbb{R}_+}$-semi-module dénombrablement complet.

Définition 5.1.7. *Soient $\mathbb{V}_1 = (V_1, +_1, 0_1, \sum, \cdot)$ et $\mathbb{V}_2 = (V_2, +_2, 0_2, \sum, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-semi-modules dénombrablement complets. On dit qu'une application f de V_1 vers V_2 est dénombrablement $\mathbb{K}$-linéaire si :*

- *pour tout $\lambda \in K$, pour tout $x \in V_1$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$;*
- *et pour tout ensemble dénombrable I, pour tout $v \in {V_1}^I$, $f(\sum_I v) = \sum_I (f \circ v)$.*

On note $\mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{K}$-semi-modules dénombrablement complets et dont les flèches sont les applications dénombrablement $\mathbb{K}$-linéaires. Reste à munir cette catégorie d'une structure monoïdale.

On note $U_{\mathbb{K}}$ le foncteur de $\mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}$ vers **Set** défini par $U_{\mathbb{K}}(V, +_V, 0_V, \sum, \cdot) = V$ sur les objets et par l'identité sur les flèches.

Définition 5.1.8. *Soit A un ensemble. On note $F_{\mathbb{K}}(A)$ le $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet $(K^{\langle A\rangle}, +, 0, \sum, \cdot)$, où $K^{\langle A\rangle}$ est l'ensemble des applications de A dans K à support dénombrable, avec $(f+g)(x) = f(x) +_K g(x)$, $0(x) = 0_{\mathbb{K}}$, $(\sum_I v)(x) = \sum_I v'_x$ où $v'_x(i) = v(i)(x)$ et $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$, et on note i_A l'application de A vers $K^{\langle A\rangle}$ définie par $i_A(x)(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$*

Proposition 5.1.9. *Pour tout ensemble A, $(F_{\mathbb{K}}(A), i_A)$ est une flèche universelle de A vers $U_{\mathbb{K}}$.*

Démonstration. Soit A un ensemble. Soit $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet et soit f une application de A vers $U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Pour tout $g \in U_{\mathbb{K}}(F_{\mathbb{K}}(A))$, on pose $\overline{f}(g) = \sum_{\alpha\in A} g(\alpha) \cdot f(\alpha)$. On a :
- $\overline{f} \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[F_{\mathbb{K}}(A), \mathbb{V}]$;
- $U_{\mathbb{K}}(\overline{f}) \circ i_A = f$.

De plus, si $f' \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[F_{\mathbb{K}}(A), \mathbb{V}]$ tel que $U_{\mathbb{K}}(f') \circ i_A = f$, alors on a $\overline{f} = f'$. □

Définition 5.1.10. *Soit $\mathbb{V} = (V, +_V, 0_V, \sum, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet. On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur V est une relation compatible sur $\mathbb{V}$ si l'on a :*
- *pour tout $\lambda \in K$, pour tous $x, y \in V$, $x \sim y \Rightarrow \lambda \cdot x \sim \lambda \cdot y$;*
- *et, pour tout ensemble dénombrable I, pour tous $v_1, v_2 \in V^I$, on a*

$$(\forall i \in I\ v_1(i) \sim v_2(i) \Rightarrow \sum_I v_1 \sim \sum_I v_2)\ .$$

Proposition 5.1.11. *Soit $\mathbb{V} = (V, +_V, 0_V, \sum, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet et soit $\sim$ une relation compatible sur $\mathbb{V}$. On note p la surjection canonique de V sur $V/\!\sim$. Alors $\mathbb{V}/\!\sim = (V/\!\sim, +_\sim, 0_\sim, \sum, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-semi-module dénombrablement complet, où $\lambda \cdot p(x) = p(\lambda \cdot x)$ et $\sum_I (p \circ v) = p(\sum_I v)$, et $p \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[\mathbb{V}, \mathbb{V}/\!\sim]$. De plus, si $f \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[\mathbb{V}, \mathbb{V}']$ est tel que pour tous $v, v' \in V$ avec $v \sim v'$, on a $f(v) = f(v')$, alors il existe un unique $\overline{f} \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[\mathbb{V}, \mathbb{V}']$ tel que $f = \overline{f} \circ p$.*

Démonstration. Tout élément x de $V/\!\sim$ est de la forme $p(v)$. On doit donc avoir $\overline{f}(x) = \overline{f}(p(v)) = f(v)$. Ceci prouve l'unicité de $\overline{f}$.

Le fait que $\overline{f}$ soit une application dénombrablement $\mathbb{K}$-linéaire provient du fait que f est une application dénombrablement $\mathbb{K}$-linéaire. □

Soient $\mathbb{V}_1 = (V_1, +_1, 0_1, \sum, \cdot)$ et $\mathbb{V}_2 = (V_2, +_2, 0_2, \sum, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-semi-modules dénombrablement complets. On définit une relation binaire $\sim_0$ sur $U_{\mathbb{K}}(F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2))$: pour tous $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, $v' \in U_{\mathbb{K}}(F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2))$, on a $i_{V_1\times V_2}(v) \sim_0 v'$ si, et seulement si,
- (il existe $\lambda_0 \in K$ et il existe $x_1 \in V_1$ tels que $v_1 = \lambda_0 \cdot x_1$ et $v' = \lambda_0 \cdot i_{(V_1\times V_2)}(x_1, v_2)$)
- ou (il existe $\lambda_0 \in K$ et il existe $x_2 \in V_2$ tels que $v_2 = \lambda_0 \cdot x_2$ et $v' = \lambda_0 \cdot i_{(V_1\times V_2)}(v_1, x_2)$)
- ou (il existe un ensemble dénombrable I et une application v_2 de I vers V_2 tels que $v_2 = \sum_I v_2$ et $v' = \sum_{i\in I} i_{V_1\times V_2}(v_1, v_2(i))$)
- ou (il existe un ensemble dénombrable I et une application v_1 de I vers V_1 tels que $v_1 = \sum_I v_1$ et $v' = \sum_{i\in I} i_{V_1\times V_2}(v_1(i), v'_2)$).

On note $\sim$ la plus petite relation compatible sur $F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)$ contenant $\sim_0$.

On pose $\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)/\sim$ et on note $i_{\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2} = U_{\mathbb{K}}(p) \circ i_{V_1\times V_2}$, où p est la surjection canonique de $F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)$ sur $\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2$.

Définition 5.1.12. *Soient $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ et $\mathbb{V}_3$ trois $\mathbb{K}$-semi-modules dénombrablement complets. Soit f une application de $U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \times U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$ vers $U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_3)$. On dit que f est une application dénombrablement $\mathbb{K}$-bilinéaire de $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ vers $\mathbb{V}_3$ si l'on a :*

– *pour tout* $v_1 \in U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1)$, *l'application* $v_2 \mapsto f(v_1, v_2)$ *est une application dénombrablement* $\mathbb{K}$*-linéaire de* $\mathbb{V}_2$ *vers* $\mathbb{V}_3$
– *et pour tout* $v_2 \in U_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$, *l'application* $v_1 \mapsto f(v_1, v_2)$ *est une application dénombrablement* $\mathbb{K}$*-linéaire de* $\mathbb{V}_1$ *vers* $\mathbb{V}_3$.

Proposition 5.1.13. *Soient* $\mathbb{V}_1 = (V_1, +_1, 0_1, \sum, \cdot)$, $\mathbb{V}_2 = (V_2, +_2, 0_2, \sum, \cdot)$ *et* $\mathbb{V}_3 = (V_3, +_3, 0_3, \sum, \cdot)$ *trois* $\mathbb{K}$*-semi-modules dénombrablement complets et soit* f *une application de* $V_1 \times V_2$ *vers* V_3*. L'application* f *est bilinéaire de* $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ *vers* $\mathbb{V}_3$ *si, et seulement si, pour tous* $v, v' \in F_{\mathbb{K}}(V_1 \times V_2)$ *tels que* $v \sim v'$*, on a* $\overline{f}(v) = \overline{f}(v')$*, où* $\overline{f}$ *est l'application définie par la Proposition 5.1.9.*

Démonstration. Remarquer que f est bilinéaire de $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ vers $\mathbb{V}_3$ si, et seulement si, on a
– (pour tout $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, pour tout $\lambda \in K$, $f(\lambda \cdot v_1, v_2) = \lambda \cdot f(v_1, v_2)$)
– et (pour tout $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, pour tout $\lambda \in K$, $f(v_1, \lambda \cdot v_2) = \lambda \cdot f(v_1, v_2)$)
– et (pour tout ensemble dénombrable I, pour toute application v_1 de I vers V_1, pour tout $v_2 \in V_2$, $f(\sum_{i \in I} v_1(i), v_2) = \sum_{i \in I} f(v_1(i), v_2)$)
– et (pour tout ensemble dénombrable I, pour tout $v_1 \in V_1$, pour toute application v_2 de I vers V_2, $f(v_1, \sum_{i \in I} v_2(i)) = \sum_{i \in I} f(v_1, v_2(i))$).

□

Théorème 5.1.14. *Soient* $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ *et* $\mathbb{V}_3$ *trois* $\mathbb{K}$*-semi-modules dénombrablement complets et soit* f *une application dénombrablement* $\mathbb{K}$*-bilinéaire de* $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$ *vers* $\mathbb{V}_3$*. Alors il existe un unique* $\overline{f} \in \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}[\mathbb{V}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3]$ *tel que* $f = U_{\mathbb{K}}(\overline{f}) \circ i_{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2}$.

Démonstration. Appliquer les Propositions 5.1.13 et 5.1.11. □

$\otimes_{\mathbb{K}}$ s'étend en un foncteur de $\mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}$ vers $\mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}$ en posant $f_1 \otimes_{\mathbb{K}} f_2 = \overline{i_{\mathbb{W}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_2} \circ (f_1 \times f_2)}$. De plus, on peut définir des isomorphismes canoniques $\alpha_{\mathbb{K}}$, $\lambda_{\mathbb{K}}$, $\rho_{\mathbb{K}}$ et $\gamma_{\mathbb{K}}$ de telle manière que $\mathcal{S}_{\mathbb{K}} = (\mathbf{1/2\overline{Mod}}_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K}, \alpha_{\mathbb{K}}, \lambda_{\mathbb{K}}, \rho_{\mathbb{K}}, \gamma_{\mathbb{K}})$ soit une catégorie monoïdale symétrique.

5.2 Construction du modèle

5.2.1 Réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs

On suppose que l'on s'est donné une catégorie $*$-autonome enrichie sur $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{R}_+}}$. Cela signifie :
– que l'on a une catégorie enrichie $\mathfrak{C} = (O, (\mathbb{C}(A, B))_{A,B \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})}, M, j)$ sur $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{R}_+}}$:
  – on note $\mathbb{C}$ la catégorie sous-jacente, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les éléments de O et telle que $\mathbb{C}[A, B] = U_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{C}(A, B))$ et $id^{\mathbb{C}}{}_A = j_A(1)$ et, si $f \in \mathbb{C}[A, B]$ et $g \in \mathbb{C}[B, C]$, alors on pose $g \circ_{\mathbb{C}} f = M_{A,B,C}(g \otimes_{\overline{\mathbb{R}_+}} f)$;
  – pour tous objets A et B, $\mathbb{C}(A, B)$ est un $\overline{\mathbb{R}_+}$-semi-module dénombrablement complet donc il possède un élément neutre pour l'addition : on le notera 0^A_B ;
– que l'on a un foncteur enrichi $\otimes$ sur $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{R}_+}}$ de $\mathfrak{C} \otimes_{\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{R}_+}}} \mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire un foncteur $\otimes$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ tel que :
  – $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot f_i) \otimes g = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot (f_i \otimes g)$
  – et $f \otimes \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot (f \otimes g_i)$;
– et que l'on a une catégorie $*$-autonome $(C, \perp)$ avec $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$.

Par conséquent, on aura le fait suivant.

Fait 5.2.1. *Soient* I *un ensemble dénombrable,* $f \in \mathbb{C}[B, C]$, $(g_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}[A, B]^I$ *et* $(\lambda_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\})^I$*. On a* $f \circ \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot g_i = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot (f \circ g_i)$.

De plus, on suppose que $((C,\perp),(T_A)_{A\in ob(\mathbb{C})})$ est un modèle des réseaux différentiels. On dira que $(\mathfrak{C},(C,*),(T_A)_{A\in ob(\mathbb{C})})$, où $(C,*)$ est une catégorie $*$-autonome sous-jacente à une catégorie enrichie $\mathfrak{C}$ sur la catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{S}_{\overline{\mathbb{R}_+}}$, est un *modèle des réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs*.

Enfin, le modèle $((C,*),(T_A)_{A\in ob(\mathbb{C})})$ des réseaux différentiels est supposé *cocommutatif*, contrairement à ce qui se passait au Chapitre 4. On reporte au Chapitre 7 une discussion à ce sujet.

Ce modèle fournit, pour tout objet A de la catégorie, des morphismes coc_A, cow_A, c_A, w_A, cod_A et d_A. On peut alors définir, par induction sur n, coc_A^n et c_A^n :
- $coc_A^0 = cow_A$ et $c_A^0 = w_A$;
- $coc_A^1 = id_{T(A)}$ et $c_A^1 = id_{T(A)}$;
- pour $n \geq 2$, $coc_A^{n+1} = coc_A \circ (coc_A^n \otimes id_{T(A)})$ et $c_A^{n+1} = (c_A^n \otimes id_{T(A)}) \circ c_A$.

Fait 5.2.2. *Pour tout entier n, on a* $c_A^n \circ cow_A = \bigotimes_{i=1}^n cow_A \circ can^{-n}$.

Démonstration. Par induction sur n. Si $n = 0$, c'est le diagramme (8) du Théorème 4.1.5. □

Lemme 5.2.3. *Pour tout entier n, on a*

$$c_A^n \circ cod_A = \sum_{i=1}^{n} \bigotimes \langle \underbrace{cow_A, \ldots, cow_A}_{i-1\ fois}, cod_A, \underbrace{cow_A, \ldots, cow_A}_{n-i\ fois} \rangle \circ (can_A^{i-1,n-i})^{-1} \quad .$$

Démonstration. Par induction sur n, en appliquant le Fait 5.2.2. □

Fait 5.2.4. *Pour tout entier n, on a* $c_A^n \circ coc_A = \bigotimes_{i=1}^n coc_A \circ \sim_{T(A),T(A)}^n \circ (c_A^n \otimes c_A^n)$.

Démonstration. Par induction sur n. Si $n = 0$, c'est le diagramme (7) du Théorème 4.1.5. □

Lemme 5.2.5. *Pour tous entiers n et p, on a* $c_A^n \circ coc_A^p = \bigotimes_{i=1}^n coc_A^p \circ \sim_{T(A)}^{n,p} \circ \bigotimes_{j=1}^p c_A^n$.

Démonstration. Par induction sur p, en appliquant le Fait 5.2.4. □

Fait 5.2.6. *Pour tout entier p, on a* $w_A \circ coc_A^p = can^p \circ \bigotimes_{j=1}^p w_A$.

Démonstration. Par induction sur p. Si $p = 0$, c'est le diagramme (8) du Théorème 4.1.5. □

Lemme 5.2.7. *Pour tout entier p non nul, pour tout objet A de* $\mathbb{C}$*, on a*

$$w_A \circ coc_A^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_A = 0_I^{\bigotimes_{j=1}^p B} \quad .$$

Démonstration. Appliquer le Fait 5.2.6. □

Lemme 5.2.8. *Pour tout entier p, on a*

$$d_A \circ coc_A^p = \sum_{j=1}^{p} can_A^{j-1,n-j} \circ \bigotimes \langle \underbrace{w_A, \ldots, w_A}_{j-1\ fois}, d_A, \underbrace{w_A, \ldots, w_A}_{n-j\ fois} \rangle \quad .$$

Démonstration. Par induction sur p, en appliquant le Fait 5.2.6. □

Proposition 5.2.9. *Pour tout entier $p \neq 1$, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$d_A \circ coc_A^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_A = 0_A^{\bigotimes_{j=1}^{p} T(A)} \quad .$$

Démonstration. Appliquer le Lemme 5.2.8. □

Lemme 5.2.10. *Pour tout entier p, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$c_A \circ coc_A^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_A = \sum_{p_1+p_2=p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p_1,p_2)} ((coc_A^{p_1} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_1} cod_A) \otimes (coc_A^{p_2} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_2} cod_A)) \circ \alpha_A^{(p_1,p_2)} \circ \sigma_A^{-1} \quad .$$

Démonstration. Par induction sur p. □

Lemme 5.2.11. *Pour tout entier n, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n \circ coc_A = \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} \sigma_A \circ (\alpha_A^{(n_1,n_2)})^{-1} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A \circ c_A^{n_1}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A \circ c_A^{n_2})) \quad .$$

Démonstration. Par induction sur n. □

Proposition 5.2.12. *Pour tous entiers n et p, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$c_A^n \circ coc_A^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_A = \sum_{\sum_{i=1}^{n} p_i = p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} \bigotimes_{i=1}^{n} (coc_A^{p_i} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} \circ \sigma_A^{-1} \quad .$$

Démonstration. Par induction sur n, en utilisant le Lemme 5.2.10. □

On en déduit alors le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.13. *Pour tous entiers p et n, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n \circ coc_A^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_A = \begin{cases} 0_{\bigotimes_{i=1}^{n} A}^{\bigotimes_{j=1}^{p} A} & si\ n \neq p \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma_A & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. Appliquer les Propositions 5.2.12 et 5.2.9. □

On va maintenant construire un modèle de MELL.

5.2.2 Traduire la logique linéaire dans les réseaux différentiels

L'objectif de cette sous-section est, en partant d'un modèle cocommutatif des réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs,

- de définir T, δ, d, m, n ;
- de montrer que $(C, (T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d), c, w)$ est un modèle de IMELL au sens de la Définition 3.3.2 (Théorème 5.2.35).

Puisque l'on a un objet dualisant $\perp$, on obtiendra même un modèle de MELL.

La formule de Taylor-Ehrhard

Voici la formule de Taylor-Ehrhard, qui traduit les boîtes de la logique linéaire avec exactement une porte auxiliaire dans les réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs.

Définition 5.2.14. *Pour tout* $f \in \mathbb{C}[TA, B]$*, on définit* $f^T \in \mathbb{C}[T(A), T(B)]$ *en posant*

$$f^T = \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_B \circ f) \circ c_A^n) \ .$$

Une comonade faible

Pour tout $f \in \mathbb{C}[A, B]$, on définit $T(f) \in \mathbb{C}[T(A), T(B)]$ en posant $T(f) = (f \circ d_A)^T$. Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on définit $\delta_A \in \mathbb{C}[T(A), T(T(A))]$ en posant $\delta_A = (id_{TA})^T$. Enfin, on pose $d = (d_A)_{A \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})}$ et $\delta = (\delta_A)_{A \in \mathrm{ob}(\mathbb{C})}$.

Lemme 5.2.15. *T est un semi-foncteur de la catégorie $\mathbb{C}$ vers la catégorie $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soient $f \in \mathbb{C}[A, B]$ et $g \in \mathbb{C}[B, C]$.

$$\begin{aligned}
T(g \circ f) &= \sum_n \frac{1}{n!}(coc_C^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_B \circ g \circ f \circ d_A) \circ c_A^n) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_C^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_C \circ g) \circ \bigotimes_{i=1}^n (f \circ d_A) \circ \sigma_{TA} \circ c_A^n) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_C^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_C \circ g) \circ \sigma_{TB} \circ \bigotimes_{i=1}^n (f \circ d_A) \circ c_A^n) \\
&= \sum_{m,n} \frac{1}{m!n!}(coc_C^m \circ \bigotimes_{i=1}^m (cod_c \circ g) \circ \bigotimes_{i=1}^m d_C \circ c_B^m \circ coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_B \circ \bigotimes_{i=1}^n (f \circ d_A) \circ c_A^n) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_C \circ g \circ d_C) \circ c_B^n) \circ \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_B \circ f \circ d_A) \circ c_A^n) \\
&= T(g) \circ T(f)
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.16. *d est une transformation naturelle de T vers $id_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}[A, B]$.

$$\begin{aligned}
d_B \circ T(f) &= d_B \circ \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_B \circ f) \circ c_A^n) \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(d_B \circ coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_B \circ f) \circ c_A^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1!}(d_B \circ coc^1_B \circ \bigotimes_{i=1}^{1}(cod_B \circ f) \circ c^1_A) \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.9)} \\
&= d_B \circ cod_B \circ f \\
&= id_B \circ f \\
&= f
\end{aligned}$$

□

Fait 5.2.17. *Pour tout $f \in \mathbb{C}[TA, B]$, on a $T(f) \circ \delta_A = f^T$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
T(f) \circ \delta_A &= \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_B \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f \circ d_{TA}) \circ c^n_{TA}) \circ \sum_p \frac{1}{p!}(coc^p_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{TA} \circ id_{TA} \circ c^p_A)) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!}(coc^n_B \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} d_{TA} \circ c^n_{TA} \circ coc^p_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{p} cod_{TA} \circ c^p_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc^n_B \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f) \circ \sigma_{TA} \circ c^p_A) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_B \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f) \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A\text{)} \\
&= f^T
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.18. *δ est une transformation naturelle de T vers $T \circ T$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}[A, B]$. On a

$$\begin{aligned}
\delta_B \circ T(f) &= \sum_n \frac{1}{n!}((coc^n_{TB} \circ \bigotimes_{j=1}^{n} cod_{TB} \circ c^n_B)) \circ \sum_p \frac{1}{p!}(coc^p_B \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ c^p_A) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ c^n_B \circ coc^p_B \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_B \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(f \circ d_A) \circ c^p_A \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_A \circ \sigma^{-1}_B \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(f \circ d_A) \circ c^p_A \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.12)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha_A^{(p_1,\ldots,p_n)} \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(f \circ d_A) \circ \sigma^{-1}_{T(A)} \circ c^p_A \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha_A^{p_1,\ldots,p_n)} \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(f \circ d_A) \circ c^p_A \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{p_i}(f \circ d_A) \circ \alpha_{T(A)}^{(p_1,\ldots,p_n)} \circ c^p_A \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{p_i}(f \circ d_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} c^{p_i}_A \circ c^n_A \\
&= \sum_{n} \frac{1}{n!} \sum_{p_1,\ldots,p_n} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \bigotimes_{j=1}^{p_i}(f \circ d_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} c^{p_i}_A \circ c^n_A \\
&= \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{TB} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{TB} \circ T(f)) \circ c^n_A) \\
&= (T(f))^T \\
&= (T \circ T)(f) \circ \delta_A \\
&\quad \text{(par le Fait 5.2.17)} \ .
\end{aligned}
$$

□

Lemme 5.2.19. *Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a $\delta_{TA} \circ \delta_A = T\delta_A \circ \delta_A$.*

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
\delta_{TA} \circ \delta_A &= (id_{TTA})^T \circ (id_{TA})^T \\
&= \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ c^n_{TA}) \circ \sum_{p} \frac{1}{p!}(coc^p_{TA} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{TA} \circ c^p_A) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} coc^p_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ c^n_{TA} \circ coc^p_{TA} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{TA} \circ c^p_A
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n,p} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} \frac{1}{n!p!} \\
&\quad coc^n_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_{T(A)} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_{T(A)} \circ \sigma^{-1}_{T(A)} \circ c^p_A \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.12)} \\
&= \sum_{n,p} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{n!p_1\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(T(A))} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(T(A))} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} -coc^{p_i}_{A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \alpha^{p_1,\ldots,p_n)}_{T(A)} \circ c^p_A \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A) \\
&= \sum_{n,p} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{n!p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{T(T(A))} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(T(A))} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_{A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} c^{p_i}_A \circ c^n_A \\
&= \sum_{n} \sum_{p_1,\ldots,p_n} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!} \\
&\quad coc^n_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_{A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} c^{p_i}_A \circ c^n_A \\
&= \sum_{n} \sum_{p_1,\ldots,p_n} \frac{1}{n!p_1\ldots p_n!} coc^n_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_{A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_A \circ c^{p_i}_A) \circ c^n_A \\
&= \sum_{n} \frac{1}{n!} coc^n_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TTA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} \delta_A \circ c^n_A \\
&= \delta_A{}^T \\
&= T\delta_A \circ \delta_A \\
&\quad \text{(par le Fait 5.2.17)} \ .
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.20. *Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a $d_{TA} \circ \delta_A = id_{TA}$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
d_{TA} \circ \delta_A &= d_{TA} \circ (\sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A)) \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(d_{TA} \circ coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\
&= \frac{1}{1!}(d_{TA} \circ coc^1_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{1} cod_{TA} \circ c^1_A) \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.9)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= d_{TA} \circ cod_{TA} \\ &= id_{TA} \end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.21. *Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, on a $T(d_A) \circ \delta_A = T(id_A)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} T(d_A) \circ \delta_A &= \sum_p \frac{1}{p!}(coc^p_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(cod_A \circ d_A \circ d_{TA}) \circ c^p_{TA}) \circ \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\ &= \sum_{p,n} \frac{1}{p!n!}(coc^p_A \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(cod_A \circ d_A \circ d_{TA}) \circ c^p_{T(A)} \circ coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\ &= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_A \circ d_A) \circ \sigma_{TA} \circ c^n_A) \\ &\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\ &= \sum_n \frac{1}{n!}(coc_A \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_A \circ d_A) \circ c^n_A) \\ &\quad \text{(par cocommutativité de } c_A) \\ &= T(id_A) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.22. *(T, δ, d) est une comonade faible dans la catégorie $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Appliquer les Lemmes 5.2.15, 5.2.16, 5.2.18, 5.2.19, 5.2.20 et 5.2.21 et remarquer que le Fait 5.2.17 implique la normalité de δ. □

Un semi-foncteur monoïdal symétrique

Définition 5.2.23. *Pour tous objets A et B de $\mathbb{C}$, on définit $m_{A,B} \in \mathbb{C}[T(A) \otimes T(B), T(A \otimes B)]$ en posant*

$$m_{A,B} = \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \ .$$

Remarque 5.2.24. *Pour tout $f \in \mathbb{C}[T(A) \otimes T(B), C]$, on a*

$$T(f) \circ m_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) = \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_C \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_C \circ f) \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \ .$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} & m_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\ = & \sum_{n,p,q} \frac{1}{n!p!q!}(coc^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_{T(A)} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_{T(B)}) \\ & \circ (c^n_{T(A)} \otimes c^n_{T(B)}) \circ ((coc^p_{T(A)} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{T(A)} \circ c^p_A) \otimes (coc^q_{T(B)} \circ \bigotimes_{j=1}^{q} cod_{T(B)} \circ c^q_B)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \sum_{n,p,q} \frac{1}{n!p!q!}(coc^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \\
& \circ((\bigotimes_{i=1}^{n} d_{T(A)} \circ c^n_{T(A)} \circ coc^p_{T(A)} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{T(A)}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_{T(B)} \circ c^n_{T(B)} \circ coc^q_{T(B)} \circ \bigotimes_{j=1}^{q} cod_{T(B)})) \\
& \circ(c^p_A \otimes c^q_B)) \\
= & \sum_{n} \frac{1}{(n!)^3} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ(\sigma_{T(A)} \otimes \tau_{T(B)}) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
& \textit{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
= & \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ(c^n_A \otimes c_B)) \\
& \textit{(par cocommutativité de } c_A \textit{ et } c_B\textit{)}
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
& T(f) \circ \mathsf{m}_{T(A),T(B)} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
= & \sum_{p,n} \frac{1}{p!n!}(coc^p_C \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(cod_C \circ f \circ d_{T(A)\otimes T(B)}) \circ c^p_{T(A)\otimes T(B)} \circ coc^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A)\otimes T(B)} \\
& \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ(c^n_A \otimes c^n_B)) \\
= & \sum_{n} \frac{1}{(n!)^2}(coc^n_C \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_C \circ f) \circ \sigma^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ(c^n_A \otimes c^n_B)) \\
& \textit{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
= & \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_C \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_C \circ f) \circ \sim^n_{(T(A),T(B))} \circ(c^n_A \otimes c^n_B)) \\
& \textit{(par cocommutativité de } c_A \textit{ et } c_B\textit{).}
\end{aligned}$$

Lemme 5.2.25. *m est une transformation naturelle normale de $\otimes \circ (T \times T)$ vers $T \circ \otimes$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord la naturalité. Pour tous $f \in \mathbb{C}[A, A']$ et $g \in \mathbb{C}[B, B']$, on a

$$\begin{aligned}
& \mathsf{m}_{A',B'} \circ (T(f) \otimes T(g)) \\
= & \sum_{n} \frac{1}{n!p_1!p_2!}(coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{A'\otimes B'} \circ \sim^n_{(A',B')} \circ(\bigotimes_{i=1}^{n} d_{A'} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_{B'}) \circ (c^n_{A'} \otimes c^n_{B'})) \\
& \circ((coc^{p_1}_{A'} \circ \bigotimes_{i=1}^{p_1}(cod_{A'} \circ f \circ d_A) \circ c^{p_1}_A) \otimes (coc^{p_2}_{B'} \circ \bigotimes_{i=1}^{p_2}(cod_{B'} \circ g \circ d_B) \circ c^{p_2}_B)) \\
= & \sum_{n} \frac{1}{(n!)^3} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{A'\otimes B'} \circ \sim^n_{(A',B')} \circ(\sigma_{A'} \otimes \tau_{B'}) \\
& \circ(\bigotimes_{i=1}^{n} f \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} g) \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
& \text{(par le Corollaire 5.2.13)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^3} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n (f\otimes g) \\
&\quad \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (\sigma_{TA} \otimes \tau_{TB}) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n (f\otimes g) \\
&\quad \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (\sigma_{T(A)} \otimes \sigma_{T(B)}) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A \text{ et } c_B) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n (f\otimes g) \\
&\quad \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A'\otimes B'} \circ \bigotimes_{i=1}^n (f\otimes g) \\
&\quad \circ \bigotimes_{i=1}^n d_{A\otimes B} \circ c^n_{A\otimes B} \circ coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^p cod_{A\otimes B} \circ \sim^p_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{j=1}^p d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^p d_B) \circ (c^p_A \otimes c^p_B)) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= T(f\otimes g) \circ \mathsf{m}_{A,B} \ .
\end{aligned}$$

Montrons maintenant la normalité.

$$\begin{aligned}
&T(id_{A\otimes B}) \circ \mathsf{m}_{A,B} \\
&= \sum_p \frac{1}{p!} (coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^p (cod_{A\otimes B} \circ d_{A\otimes B}) \circ c^p_{A\otimes B}) \\
&\quad \circ \sum_n \frac{1}{n!} (coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&= \sum_{p,n} \frac{1}{p!n!} (coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^p d_{A\otimes B} \circ c^p_{A\otimes B} \circ coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A\otimes B} \\
&\quad \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{A\otimes B} \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} (coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A \text{ et } c_B)
\end{aligned}$$

$$= \quad \mathsf{m}_{A,B} \quad .$$

□

Définition 5.2.26. *On pose*

$$\mathsf{n} = \sum_n \frac{1}{n!}(coc_I^n \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_I \circ can^{-n}) \quad .$$

Proposition 5.2.27. $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *est un semi-endofoncteur monoïdal symétrique de* $(\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$.

Démonstration. Par le Lemme 5.2.15, on sait que T est un semi-endofoncteur de $\mathbb{C}$ et, par le Lemme 5.2.25, on sait que m est une transformation naturelle normale de $\otimes \circ (T \times T)$ vers $T \circ \otimes$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
& \mathsf{m}_{A\otimes B,C} \circ (\mathsf{m}_{A,B} \otimes id_{T(C)}) \\
= \; & \sum_{p,n} \frac{1}{p!n!}(coc^p_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \sim^p_{A\otimes B,C} \circ (\bigotimes_{j=1}^p d_{A\otimes B} \otimes \bigotimes_{j=1}^p d_C) \circ (c^p_{A\otimes B} \otimes c^p_C) \\
& \circ ((coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A\otimes B} \circ \sim^n_{A,B} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes id_{T(C)}) \\
= \; & \sum_{p,n} \frac{1}{p!n!}(coc^p_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \sim^p_{A\otimes B,C} \circ ((\bigotimes_{j=1}^p d_{A\otimes B} \circ c^p_{A\otimes B} \circ coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A\otimes B} \\
& \circ \sim^n_{A,B} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^p d_C \circ c^p_C))) \\
= \; & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \sim^n_{A\otimes B,C} \\
& \circ ((\sigma_{A\otimes B} \circ \sim^n_{A,B} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^n d_C \circ c^n_C))) \\
& \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
= \; & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \sim^n_{A\otimes B,C} \\
& \circ ((\sim^n_{A,B} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (\sigma_{T(A)} \otimes \sigma_{T(B)}) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^n d_C \circ c^n_C))) \\
= \; & \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \sim^n_{A\otimes B,C} \\
& \circ ((\sim^n_{A,B} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^n d_C \circ c^n_C))) \\
& \text{(par cocommutativité de } c_A \text{ et } c_B)
\end{aligned}$$

et, pour tout entier n, on a

$$
\begin{aligned}
& \sim^n_{A\otimes B,C} \circ((\sim^n_{A,B} \circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^n d_C \circ c^n_C)) \circ \alpha_{T(A),T(B),T(C)} \\
= \; & \sim^n_{(A\otimes B,C)} \circ(\sim^n_{A,B} \otimes id_{\bigotimes_{i=1}^n C}) \circ (((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n d_B \circ c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n d_C \circ c^n_C)) \circ \alpha_{T(A),T(B),T(C)} \\
= \; & \sim^n_{(A\otimes B,C)} \circ(\sim^n_{A,B} \otimes id_{\bigotimes_{i=1}^n C}) \\
& \circ\alpha_{\bigotimes_{i=1}^n A,\bigotimes_{i=1}^n B,\bigotimes_{i=1}^n C} \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes ((\bigotimes_{i=1}^n d_B \circ c^n_B) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n d_C \circ c^n_C))) \\
= \; & \bigotimes_{i=1}^n \alpha_{A,B,C} \circ \sim^n_{(A,B\otimes C)} \circ(id_{\bigotimes_{i=1}^n A} \otimes \sim^n_{(B,C)}) \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes ((\bigotimes_{i=1}^n d_B \circ c^n_B) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n d_C \circ c^n_C)))
\end{aligned}
$$

donc on a

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{m}_{A\otimes B,C} \circ (\mathsf{m}_{A,B} \otimes id_{T(C)}) \circ \alpha_{T(A),T(B),T(C)} \\
= \; & \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{j=1}^n cod_{(A\otimes B)\otimes C} \\
& \circ \sim^n_{A\otimes B,C} \circ((\sim^n_{A,B} \circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \otimes (\bigotimes_{j=1}^n d_C \circ c^n_C)) \circ \alpha_{T(A),T(B),T(C)}) \\
= \; & \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{i=1}^n \alpha_{A,B,C} \circ \sim^n_{(A,B\otimes C)} \circ(id_{\bigotimes_{i=1}^n A} \otimes \sim^n_{(B,C)}) \\
& \circ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes ((\bigotimes_{i=1}^n d_B \circ c^n_B) \otimes (\bigotimes_{i=1}^n d_C \circ c^n_C)))) \\
= \; & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \alpha_{A,B,C}) \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
& \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ \sigma_{T(A)} \circ c^p_A) \otimes (\sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ ((\sigma_{T(B)} \circ c^p_B) \otimes (\sigma_{T(C)} \circ c^p_C))))) \\
& \text{(par cocommutativité de } c_A, c_B \text{ et } c_C) \\
= \; & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \alpha_{A,B,C}) \circ \sigma_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
& \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ (c^p_B \otimes c^p_C)))) \\
= \; & \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!}(coc^n_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_{(A\otimes B)\otimes C} \circ \alpha_{A,B,C} \circ d_{A\otimes(B\otimes C)}) \circ c^n_{A\otimes(B\otimes C)} \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \\
& \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ (c^p_B \otimes c^p_C)))) \\
& \text{(par le Corollaire 5.2.13)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_p \frac{1}{p!}(T(\alpha_{A,B,C}) \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
&\quad \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ (c^p_B \otimes c^p_C)))) \\
&= \sum_p \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} (T(\alpha_{A,B,C}) \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
&\quad \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ (\sigma_{T(B)} \otimes \sigma_{T(C)}) \circ (c^p_B \otimes c^p_C)))) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_B \text{ et } c_C) \\
&= \sum_p \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} (T(\alpha_{A,B,C}) \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
&\quad \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\sigma_{B\otimes C} \circ \sim^p_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^p d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^p d_C) \circ (c^p_B \otimes c^p_C)))) \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!}(T(\alpha_{A,B,C}) \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \\
&\quad \circ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c^p_A) \otimes (\bigotimes_{j=1}^p d_{B\otimes C} \circ c^p_{B\otimes C} \circ coc^q_{B\otimes C} \circ \bigotimes_{k=1}^q cod_{B\otimes C} \\
&\quad \circ \sim^q_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^q d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^q d_C) \circ (c^q_B \otimes c^q_C)))) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!}(T(\alpha_{A,B,C}) \circ coc^p_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A\otimes(B\otimes C)} \circ \sim^p_{(A,B\otimes C)} \circ(\bigotimes_{j=1}^p d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^p d_{B\otimes C}) \\
&\quad \circ(c^p_A \otimes c^p_{B\otimes C}) \circ (id_{T(A)} \otimes (coc^q_{B\otimes C} \circ \bigotimes_{k=1}^q cod_{B\otimes C} \circ \sim^q_{(B,C)} \circ(\bigotimes_{k=1}^q d_B \otimes \bigotimes_{k=1}^q d_C) \circ (c^q_B \otimes c^q_C)))) \\
&= T(\alpha_{A,B,C}) \circ \mathsf{m}_{A,B\otimes C} \circ (id_{T(A)} \otimes \mathsf{m}_{B,C}) \ ,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que le diagramme (1) de la Définition 3.2.28 commute. De plus, pour tout entier n, on a

$$
\begin{aligned}
& coc^n_A \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_A \circ \bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A \circ \rho_{T(A)} \\
= \ & coc^n_A \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_A \circ \rho_{\bigotimes_{i=1}^n A} \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes id_I) \\
= \ & coc^n_A \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_A \circ \rho_A) \circ \sim^n_{(A,I)} \circ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A) \otimes \mathrm{can}^{-n})
\end{aligned}
$$

donc on a

$$
T(id_A) \circ \rho_{T(A)} = \sum_n \frac{1}{n!}(coc^n_A \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_A \circ \bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c^n_A \circ \rho_{T(A)})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n \frac{1}{n!}(coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_A \circ \rho_A) \circ \sim^n_{(A,I)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c_A^n) \otimes \mathrm{can}^{-n})) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \\
&\quad (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_A \circ \rho_A) \circ \sim^n_{(A,I)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ \circ \sigma_{T(A)} \circ c_A^n) \otimes (\sigma_I \circ \mathrm{can}^{-n}))) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A\text{)} \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \\
&\quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_A \circ \rho_A) \circ \sigma_{A \otimes I} \circ \sim^n_{(A,I)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c_A^n) \otimes \mathrm{can}^{-n})) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!}(coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^n (cod_A \circ \rho_A \circ d_{A \otimes I}) \circ c^n_{A \otimes I} \\
&\quad \circ coc^p_{A \otimes I} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A \otimes I} \circ \sim^p_{(A,I)} \circ ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c_A^p) \otimes \mathrm{can}^{-p})) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_p \frac{1}{p!}(T(\rho_A) \circ coc^p_{A \otimes I} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A \otimes I} \circ \sim^p_{(A,I)} \circ ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c_A^p) \otimes \mathrm{can}^{-p})) \\
&= \sum_p \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (T(\rho_A) \circ coc^p_{A \otimes I} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A \otimes I} \circ \sim^p_{(A,I)} \\
&\quad \circ ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c_A^p) \otimes (\sigma_I \circ \mathrm{can}^{-p}))) \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!}(T(\rho_A) \circ coc^p_{A \otimes I} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A \otimes I} \circ \sim^p_{(A,I)} \\
&\quad \circ ((\bigotimes_{j=1}^p d_A \circ c_A^p) \otimes (\bigotimes_{j=1}^p d_I \circ c_I^p \circ coc_I^q \circ \bigotimes_{k=1}^q cod_I \circ \mathrm{can}^{-q}))) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!}(T(\rho_A) \circ coc^p_{A \otimes I} \circ \bigotimes_{j=1}^p cod_{A \otimes I} \circ \sim^p_{(A,I)} \circ (\bigotimes_{j=1}^p d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^p d_I) \circ (c_A^p \otimes c_I^p) \\
&\quad \circ (id_{T(A)} \otimes (coc_I^q \circ \bigotimes_{k=1}^q cod_I \circ \mathrm{can}^{-q}))) \\
&= T(\rho_A) \circ \mathsf{m}_{A,I} \circ (id_{T(A)} \otimes \mathsf{n}) \ ,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que le diagramme (2) de la Définition 3.2.28 commute. De plus, pour tout entier n, on a

$$
coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_A \circ \bigotimes_{i=1}^n d_A \circ c_A^n \circ \lambda_{T(A)}
$$

$$= \quad coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \lambda_{\bigotimes_{i=1}^n A} \circ (id_I \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n))$$

$$= \quad coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_A \circ \lambda_A) \circ \sim^n_{(I,A)} \circ (\mathrm{can}^{-n} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n))$$

donc on a

$$\begin{aligned}
T(id_A) \circ \lambda_{T(A)} &= \sum_n \frac{1}{n!} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n \circ \lambda_{T(A)}) \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_A \circ \lambda_A) \circ \sim^n_{(I,A)} \circ (\mathrm{can}^{-n} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n))) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \\
&\quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_A \circ \lambda_A) \circ \sim^n_{(I,A)} \circ ((\sigma_I \circ \mathrm{can}^{-n}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ \sigma_{T(A)} \circ c_A^n))) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_A \circ \lambda_A) \circ \sigma_{I \otimes A} \circ \sim^n_{(I,A)} \circ (\mathrm{can}^{-n} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n))) \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_A \circ \lambda_A \circ d_{I \otimes A}) \circ c^n_{I \otimes A} \\
&\quad \circ coc^p_{I \otimes A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{I \otimes A} \circ \sim^p_{(I,A)} \circ (\mathrm{can}^{-p} \otimes (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \circ c_A^p))) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_p \frac{1}{p!} (T(\lambda_A) \circ coc^p_{I \otimes A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{I \otimes A} \circ \sim^p_{(I,A)} \circ (\mathrm{can}^{-p} \otimes (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \circ c_A^p))) \\
&= \sum_p \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (T(\lambda_A) \circ coc^p_{I \otimes A} \\
&\quad \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{I \otimes A} \circ \sim^p_{(I,A)} \circ ((\sigma_I \circ \mathrm{can}^{-p}) \otimes (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \circ c_A^p))) \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!} (T(\lambda_A) \circ coc^p_{I \otimes A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{I \otimes A} \circ \sim^p_{(I,A)} \\
&\quad \circ ((\bigotimes_{j=1}^{p} d_I \circ c_I^p \circ coc_I^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} cod_I \circ \mathrm{can}^{-q}) \otimes (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \circ c_A^p))) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!} (T(\lambda_A) \circ coc^p_{I \otimes A} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{I \otimes A} \circ \sim^p_{(I,A)} \circ (\bigotimes_{j=1}^{p} d_I \otimes \bigotimes_{j=1}^{p} d_A) \circ (c_I^p \otimes c_A^p) \\
&\quad \circ ((coc_I^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} cod_I \circ \mathrm{can}^{-q}) \otimes id_{T(A)}))
\end{aligned}$$

$$= \quad T(\lambda_A) \circ \mathsf{m}_{I,A} \circ (\mathsf{n} \otimes id_{T(A)}) \ ,$$

c'est-à-dire que le diagramme (3) de la Définition 3.2.28 commute. De plus, on a

$$\begin{aligned} T(id_I) \circ \mathsf{n} &= \sum_{n,p} \frac{1}{p!n!}(coc_I^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p}(cod_I \circ d_I) \circ c_I^p \circ coc_I^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n}) \\ &= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_I^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ \sigma_I \circ can^{-n}) \\ &\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\ &= \sum_n \frac{1}{n!}(coc_I^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n}) \\ &= \mathsf{n} \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le diagramme (4) de la Définition 3.2.28 commute. Enfin, on a

$$\begin{aligned} & T(\gamma_{A,B}) \circ \mathsf{m}_{A,B} \\ = & \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!}(coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{B\otimes A} \circ \gamma_{A,B} \circ d_{A\otimes B}) \circ c_{A\otimes B}^n \circ coc_{A\otimes B}^p \circ \bigotimes_{i=1}^{p} cod_{A\otimes B} \\ & \circ \sim_{(A,B)}^p \circ (\bigotimes_{i=1}^{p} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{p} d_B) \circ (c_A^p \otimes c_B^p)) \\ = & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{B\otimes A} \circ \gamma_{A,B}) \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \sim_{(A,B)}^n \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c_A^n \otimes c_B^n)) \\ & \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\ = & \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{B\otimes A} \circ \gamma_{A,B}) \circ \sigma_{A\otimes B} \circ \sim_{(A,B)}^n \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \\ & \circ ((\sigma_{T(A)} \circ c_A^n) \otimes (\sigma_{T(B)} \circ c_B^n))) \\ = & \sum_n \frac{1}{n!}(coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{B\otimes A} \circ \sim_{(B,A)}^n \circ \gamma_{\bigotimes_{i=1}^n A, \bigotimes_{i=1}^n B} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c_A^n \otimes c_B^n)) \\ & \text{(par cocommutativité de } c_A \text{ et } c_B) \\ = & \sum_n \frac{1}{n!}(coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{B\otimes A} \circ \gamma_{A,B}) \circ \sim_{(A,B)}^n \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c_A^n \otimes c_B^n)) \\ = & \sum_n \frac{1}{n!}(coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{B\otimes A} \circ \sim_{(B,A)}^n \circ \gamma_{\bigotimes_{i=1}^n A, \bigotimes_{i=1}^n B} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c_A^n \otimes c_B^n)) \\ = & \sum_n \frac{1}{n!}(coc_{B\otimes A}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{B\otimes A} \circ \sim_{(B,A)}^n \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_B \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_A) \circ (c_B^n \otimes c_A^n) \circ \gamma_{T(A),T(B)}) \\ = & \mathsf{m}_{B,A} \circ \gamma_{T(A),T(B)} \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le diagramme de la Définition 3.2.34 commute. □

Contraction et affaiblissement

Proposition 5.2.28. $(c_A)_{A \in ob(\mathbb{C})}$ *est une transformation naturelle monoïdale de* $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *vers* $(\otimes, \sim, can^{-2}) \circ \Delta_C \circ (T, \mu, d)$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}[A,B]$. On a

$$
\begin{aligned}
& (T(f) \otimes T(f)) \circ c_A \\
= & \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1}(cod_B \circ f \circ d_A)) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2}(cod_B \circ f \circ d_A))) \circ (c_A^{n_1} \otimes c_A^{n_2}) \circ c_A) \\
= & \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!} \\
& (((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1}(cod_B \circ f \circ d_A)) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2}(cod_B \circ f \circ d_A))) \circ \alpha_{TA}^{(n_1,n_2)} \circ c_A^{n_1+n_2}) \\
= & \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_B) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_B)) \circ \alpha_B^{(n_1,n_2)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1+n_2}(f \circ d_A) \circ c_A^{n_1+n_2}) \\
= & \sum_{n} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_B) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_B)) \circ \alpha_B^{(n_1,n_2)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(f \circ d_A) \circ c_A^{n}) \\
= & \sum_{n} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} \\
& (((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_B) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_B)) \circ \alpha_B^{(n_1,n_2)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(f \circ d_A) \circ \sigma_{T(A)}^{-1} \circ c_A^{n}) \\
& \text{(par cocommutativité de } c_A) \\
= & \sum_{n} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} \\
& (((coc_B^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_B) \otimes (coc_B^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_B)) \circ \alpha_B^{(n_1,n_2)} \circ \sigma_B^{-1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(f \circ d_A) \circ c_A^{n}) \\
= & \sum_{n} \frac{1}{n!}(c_B \circ coc_B^{n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ c_A^{n}) \\
& \text{(par la Proposition 5.2.12)} \\
= & c_B \circ T(f) \quad ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_I \circ \mathsf{n} = & \sum_{n} \frac{1}{n!}(c_I \circ coc_I^{n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n}) \\
& \sum_{n} \frac{1}{n!} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} (((coc_I^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_I) \otimes (coc_I^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_I)) \circ \alpha_I^{(n_1,n_2)} \circ \sigma_I^{-1} \circ \mathrm{can}^{-n}) \\
& \text{(par la Proposition 5.2.12)} \\
= & \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc_I^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_I) \otimes (coc_I^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_I)) \circ \alpha_I^{(n_1,n_2)} \circ can^{-(n_1+n_2)}) \\
= & \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc_I^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_I) \otimes (coc_I^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_I)) \circ (can^{-n_1} \otimes can^{-n_2}) \circ can^{-2}) \\
= & (\mathsf{n} \otimes \mathsf{n}) \circ can^{-2} \quad ;
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\begin{aligned}
c_{A\otimes B}\circ \mathsf{m}_{A,B} &= \sum_n \frac{1}{n!}(c_{A\otimes B}\circ coc^n_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A\otimes B}\circ \sim^n_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B)\circ(c^n_A\otimes c^n_B))\\
&= \sum_n \frac{1}{n!}\sum_{n_1+n_2=n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n_1,n_2)}(((coc^{n_1}_{A\otimes B} cod_{A\otimes B})\otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}))\\
&\quad \circ\alpha^{(n_1,n_2)}_{A\otimes B}\circ\sigma^{-1}_{A\otimes B}\circ \sim^n_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B)\circ(c^n_A\otimes c^n_B))\\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.12)}\\
&= \sum_n \frac{1}{n_1!n_2!}\sum_{n_1+n_2=n}(((coc^{n_1}_{A\otimes B} cod_{A\otimes B})\otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}))\\
&\quad \circ\alpha^{(n_1,n_2)}_{A\otimes B}\circ \sim^n_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B)\circ(c^n_A\otimes c^n_B))\\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A \text{ et } c_B)\\
&= \sum_n \frac{1}{n_1!n_2!}\sum_{n_1+n_2=n}(((coc^{n_1}_{A\otimes B} cod_{A\otimes B})\otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}))\circ(\sim^{n_1}_{(A,B)}\otimes\sim^{n_2}_{(A,B)})\\
&\quad \circ \sim_{\bigotimes_{i=1}^{n_1}A,\bigotimes_{i=1}^{n_2}A,\bigotimes_{i=1}^{n_1}B,\bigotimes_{i=1}^{n_2}B} \circ(\alpha^{n_1,n_2}_A\otimes\alpha^{n_1,n_2}_B)\circ(\bigotimes_{i=1}^n d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B)\circ(c^n_A\otimes c^n_B))\\
&= \sum_n \frac{1}{n_1!n_2!}\sum_{n_1+n_2=n}(((coc^{n_1}_{A\otimes B} cod_{A\otimes B})\otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}))\circ(\sim^{n_1}_{(A,B)}\otimes\sim^{n_2}_{(A,B)})\\
&\quad \circ \sim_{\bigotimes_{i=1}^{n_1}A,\bigotimes_{i=1}^{n_2}A,\bigotimes_{i=1}^{n_1}B,\bigotimes_{i=1}^{n_2}B}\\
&\quad \circ((\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A)\otimes(\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_B\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_2} d_B))\circ(\alpha^{n_1,n_2}_{T(A)}\otimes\alpha^{n_1,n_2}_{T(B)})\circ(c^n_A\otimes c^n_B))\\
&= \sum_{n_1,n_2}\frac{1}{n_1!n_2!}(((coc^{n_1}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{A\otimes B}\circ \sim^{n_1}_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_1} d_B))\\
&\quad \otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}\circ \sim^{n_2}_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_2} d_B)))\\
&\quad \circ \sim_{\bigotimes_{i=1}^{n_1}T(A),\bigotimes_{i=1}^{n_2}T(A),\bigotimes_{i=1}^{n_1}T(B),\bigotimes_{i=1}^{n_2}T(B)} \circ((c^{n_1}_A\otimes c^{n_2}_A)\otimes(c^{n_1}_B\otimes c^{n_2}_B))\circ(c_A\otimes c_B))\\
&= \sum_{n_1,n_2}\frac{1}{n_1!n_2!}(((coc^{n_1}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{A\otimes B}\circ \sim^{n_1}_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_1} d_B))\\
&\quad \otimes(coc^{n_2}_{A\otimes B}\circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{A\otimes B}\circ \sim^{n_2}_{(A,B)} \circ(\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A\otimes \bigotimes_{i=1}^{n_2} d_B)))\\
&\quad \circ((c^{n_1}_A\otimes c^{n_1}_B)\otimes(c^{n_2}_A\otimes c^{n_2}_B))\circ \sim^2_{(TA,TB)} \circ(c_A\otimes c_B))\\
&= (\mathsf{m}_{A,B}\otimes\mathsf{m}_{A,B})\circ \sim^2_{(TA,TB)} \circ(c_A\otimes c_B)\ .
\end{aligned}
$$

□

Proposition 5.2.29. $(w_A)_{A\in ob(\mathbb{C})}$ *est une transformation naturelle monoïdale de* $(T,\mathsf{m},\mathsf{n})$ *vers* $*_C$.

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{C}[A, B]$. On a

$$\begin{array}{rcl} w_B \circ T(f) & = & \sum_n \frac{1}{n!}(w_B \circ coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ c_A^n) \\ & = & \frac{1}{0!}(w_B \circ coc_B^0 \circ \bigotimes_{i=1}^{0}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ c_A^0) \\ & & \text{(par le Lemme 5.2.7)} \\ & = & w_B \circ cow_B \circ id_I \circ w_A \\ & = & w_A \ ; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} w_{A\otimes B} \circ \mathsf{m}_{A,B} & = & \sum_n \frac{1}{n!}(w_{A\otimes B} \circ coc_{A\otimes B}^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{A\otimes B} \circ \sim_{(A,B)}^n \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c_A^n \otimes c_B^n)) \\ & = & \frac{1}{0!}(w_{A\otimes B} \circ coc_{A\otimes B}^0 \circ \bigotimes_{i=1}^{0} cod_{A\otimes B} \circ \sim_{(A,B)}^0 \circ (\bigotimes_{i=1}^{0} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{0} d_B) \circ (c_A^0 \otimes c_B^0)) \\ & & \text{(par le Lemme 5.2.7)} \\ & = & w_{A\otimes B} \circ cow_{A\otimes B} \circ id_I \circ \sim_{A,B}^0 \circ (id_I \otimes id_I) \circ (w_A \otimes w_B) \\ & = & can^2 \circ (w_A \otimes w_B) \ ; \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} w_I \circ \mathsf{n} & = & \sum_n \frac{1}{n!}(w_I \circ coc_I^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n}) \\ & = & \frac{1}{0!}(w_I \circ coc_I^0 \circ \bigotimes_{i=1}^{0} cod_I \circ can^{-0}) \\ & & \text{(par le Lemme 5.2.7)} \\ & = & (w_I \circ cow_I \circ id_I \circ id_I) \\ & = & id_I \ . \end{array}$$

□

Proposition 5.2.30. $((TA, \delta_A), c_A, w_A)$ *est un comonoïde cocommutatif dans* $(\mathbb{C}^{\mathbb{T}}, \otimes^{\mathbb{T}}, (I, \mathsf{n}), \alpha, \lambda, \rho)$.

Démonstration. Par hypothèse, (TA, c_A, w_A) est un comonoïde cocommutatif dans C. De plus, on a

$$\begin{array}{l} \mathsf{m}_{TA,TA} \circ (\delta_A \otimes \delta_A) \circ c_A \\ = \sum_{p,n_1,n_2} \frac{1}{p!n_1!n_2!}(coc_{TA\otimes TA}^p \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{TA\otimes TA} \circ \sim_{(TA,TA)}^p \\ \circ(\bigotimes_{j=1}^{p} d_{TA} \otimes \bigotimes_{j=1}^{p} d_{TA}) \circ (c_{TA}^p \otimes c_{TA}^p) \circ ((coc_{TA}^{n_1} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{TA}) \otimes (coc_{TA}^{n_2} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{TA})) \\ \circ(c_A^{n_1} \otimes c_A^{n_2}) \circ c_A) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^3} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{TA\otimes TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA\otimes TA} \circ \sim^n_{(TA,TA)} \circ (\sigma_{TA}\otimes\tau_{TA}) \circ (c^n_A \otimes c^n_A) \circ c_A) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{TA\otimes TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA\otimes TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} c_A \circ \sigma_{T(A)} \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A\text{)} \\
&= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc^p_{TA\otimes TA} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} (cod_{TA\otimes TA} \circ c_A \circ d_{TA}) \circ c^p_{TA} \circ coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= T(c_A) \circ \delta_A
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
T(w_A)\circ\delta_A &= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_I \circ w_A \circ d_{TA}) \circ c^n_{TA} \circ coc^p_{TA} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{TA} \circ c^p_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_I \circ w_A) \circ \sigma_{TA} \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} (coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_I \circ w_A) \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A\text{)} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!} (coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n} \circ w_A) \\
&= \mathsf{n} \circ w_A \quad .
\end{aligned}
$$

□

Proposition 5.2.31. *Pour tout objet A de* $\mathbb{C}$, δ_A *est un morphisme de comonoïdes de* $((TA,\delta_A),c_A,w_A)$ *vers* $((TTA,\delta_{TA}),c_{TA},w_{TA})$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
c_{TA}\circ\delta_A &= \sum_n \frac{1}{n!} (c_{TA} \circ coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\
&= \sum_n \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(n_1,n_2)} \\
&\quad (((coc^{n_1}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{TA}) \otimes (coc^{n_2}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{TA})) \circ \alpha^{(n_1,n_2)}_{T(A)} \circ \sigma^{-1}_{T(A)} \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.12)} \\
&= \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!} (((coc^{n_1}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{TA}) \otimes (coc^{n_2}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{TA})) \circ \alpha^{(n_1,n_2)}_{T(A)} \circ c^n_A) \\
&\quad \text{(par cocommutativité de } c_A\text{)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc^{n_1}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{TA}) \otimes (coc^{n_2}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{TA})) \circ (c^{n_1}_A \otimes c^{n_2}_A) \circ c_A) \\
&= \sum_{n_1,n_2} \frac{1}{n_1!n_2!}(((coc^{n_1}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_1} cod_{TA} \circ c^{n_1}_A) \otimes (coc^{n_2}_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n_2} cod_{TA} \circ c^{n_2}_A)) \circ c_A) \\
&= (\delta_A \otimes \delta_A) \circ c_A
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
w_{TA} \circ \delta_A &= \sum_n \frac{1}{n!}(w_{TA} \circ coc^n_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(\mathrm{can}^{-n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} w_{TA} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TA} \circ c^n_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}(\mathrm{can}^{-n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(w_{TA} \circ cod_{TA}) \circ c^n_A) \\
&= id_I \circ c^0_A \\
&= w_A \quad .
\end{aligned}$$

□

Une comonade faible monoïdale symétrique

Lemme 5.2.32. *d est une semi-tranformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers id_C.*

Démonstration. Par le lemme 5.2.16, on sait déjà que d est une transformation naturelle de T vers $id_{\mathbb{C}}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
d_{A\otimes B} \circ \mathsf{m}_{A,B} &= \sum_n \frac{1}{n!}(d_{A\otimes B} \circ coc^n_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{A\otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
&= \frac{1}{1!}(d_{A\otimes B} \circ coc^1_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^{1} cod_{A\otimes B} \circ \sim^1_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^{1} d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^{1} d_B) \circ (c^1_A \otimes c^1_B)) \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.9)} \\
&= d_{A\otimes B} \circ cod_{A\otimes B} \circ (d_A \otimes d_B) \\
&= d_A \otimes d_B
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_I \circ \mathsf{n} &= \sum_n \frac{1}{n!}(d_I \circ coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_I \circ can^{-n}) \\
&= \frac{1}{1!}(d_I \circ coc^1_I \circ \bigotimes_{i=1}^{1} cod_I \circ can^{-1}) \\
&\quad \text{(par la Proposition 5.2.9)} \\
&= d_I \circ id_{T(I)} \circ cod_I \circ id_I \\
&= id_I \quad .
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.33. *δ est une transformation naturelle monoïdale de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n}) \circ (T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$.*

Démonstration. Par le Lemme 5.2.18, on sait déjà que δ est une transformation naturelle de T vers $T \circ T$. De plus, on a

$$
\begin{aligned}
& T\mathsf{m}_{A,B} \circ \mathsf{m}_{TA,TB} \circ (\delta_A \otimes \delta_B) \\
= \;& \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B} \circ d_{T(A)\otimes T(B)}) \circ c^n_{T(A)\otimes T(B)} \circ coc^p_{T(A)\otimes T(B)} \\
& \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^p_{(T(A),T(B))} \circ (\bigotimes_{j=1}^{p} d_{T(A)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{p} d_{T(B)}) \circ (c^p_{T(A)} \otimes c^p_{T(B)}) \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B}) \circ \sigma_{TA\otimes TB} \\
& \circ \sim^n_{(TA,TB)} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_{TA} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_{TB}) \circ (c^n_{TA} \otimes c^n_{TB}) \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \\
& \text{(par le Corollaire 5.2.13)} \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B}) \\
& \circ \sim^n_{(TA,TB)} \circ (\bigotimes_{i=1}^{n} d_{TA} \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} d_{TB}) \circ ((\sigma_{T(T(A))} \circ c^n_{TA}) \otimes (\sigma_{T(T(B))} \circ c^n_{TB})) \circ (\delta_A \otimes \delta_B)) \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B}) \\
& \circ \sim^n_{(TA,TB)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n} d_{TA} \circ c^n_{TA} \circ \delta_A) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} d_{TB} \circ c^n_{TB} \circ \delta_B))) \\
& \text{(par cocommutativité de } c_{T(A)} \text{ et de } c_{T(B)}) \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B}) \circ \sim^n_{(TA,TB)} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n} id_{T(A)} \circ c^n_A) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} id_{T(B)} \circ c^n_B))) \\
& \text{(par la Proposition 5.2.31)} \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{n!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ \mathsf{m}_{A,B}) \circ \sim^n_{(TA,TB)} \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
= \;& \sum_{n} \frac{1}{n!} \sum_{p_1,\ldots,p_n} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \\
& \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_{T(A\otimes B)} \circ coc^{p_i}_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_{A\otimes B} \circ \sim^{p_i}_{A,B} \circ (\bigotimes_{j=1}^{p_i} d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^{p_i} d_B) \circ (c^{p_i}_A \otimes c^{p_i}_B)) \\
& \circ \sim^n_{T(A),T(B)} \circ (c^n_A \otimes c^n_B)) \\
= \;& \sum_{n,p} \frac{1}{n!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!}(coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(coc^{p_i}_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_{A\otimes B}) \\
& \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(\bigotimes_{j=1}^{p_i}(d_A \otimes d_B)) \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(\sim^{p_i}_{T(A),T(B)} \circ (c^{p_i}_A \otimes c^{p_i}_B)) \circ \sim^n_{T(A),T(B)} \circ (c^n_A \otimes c^n_B))
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} (coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (coc^{p_i}_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_{A\otimes B})$$

$$\circ \bigotimes_{i=1}^{n} (\bigotimes_{j=1}^{p_i} (d_A \otimes d_B)) \circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sigma^{-1}_{T(A)\otimes T(B)} \circ \sim^{p}_{T(A),T(B)} \circ (c^p_A \otimes c^p_B))$$

(par cocommutativité de c_A et c_B)

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)} (coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (coc^{p_i}_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_{A\otimes B})$$

$$\circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_{A\otimes B} \circ \sigma^{-1}_{A\otimes B} \circ \sim^{p}_{A,B} \circ (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^{p} d_B) \circ (c^p_A \otimes c^p_B))$$

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc^n_{T(A\otimes B)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(A\otimes B)}$$

$$\circ c^n_{A\otimes B} \circ coc^p_{A\otimes B} \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_{A\otimes B} \circ \sim^{p}_{A,B} \circ (\bigotimes_{j=1}^{p} d_A \otimes \bigotimes_{j=1}^{p} d_B) \circ (c^p_A \otimes c^p_B))$$

$$= \delta_{A\otimes B} \circ \mathsf{m}_{A,B}$$

et

$$\delta_I \circ \mathsf{n} = \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc^n_{TI} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{TI} \circ c^n_I \circ coc^p_I \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_I \circ can^{-p})$$

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p_1,\ldots,p_n)}$$

$$(coc^n_{T(I)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(I)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (coc^{p_i}_I \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_I) \circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_I \circ \sigma^{-1}_I \circ \mathrm{can}^{-p})$$

(par la Proposition 5.2.12)

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!} \sum_{p_1+\ldots+p_n=p} \frac{1}{p_1!\ldots p_n!}$$

$$(coc^n_{T(I)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_{T(I)} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (coc^{p_i}_I \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_I) \circ \alpha^{(p_1,\ldots,p_n)}_I \circ \mathrm{can}^{-p})$$

$$= \sum_{n} \sum_{p_1,\ldots,p_n} \frac{1}{n!p_1!\ldots p_n!} (coc^n_{TI} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_{TI} \circ coc^{p_I}_I \circ \bigotimes_{j=1}^{p_i} cod_I) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} can^{-p_i} \circ can^{-n})$$

$$= \sum_{n} \frac{1}{n!} (coc^n_{TI} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_{TI} \circ \mathsf{n}) \circ can^{-n})$$

$$= \sum_{n} \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (coc^n_{TI} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_{TI} \circ \mathsf{n}) \circ \sigma_I \circ can^{-n})$$

$$= \sum_{n,p} \frac{1}{n!p!} (coc^n_{TI} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} (cod_{TI} \circ \mathsf{n}) \circ \bigotimes_{i=1}^{n} d_I \circ c^n_I \circ coc^n_I \circ \bigotimes_{j=1}^{p} cod_I \circ can^{-p})$$

(par le Corollaire 5.2.13)

$$= \quad T(\mathsf{n}) \circ \mathsf{n} \ .$$

□

Proposition 5.2.34. $((T, \delta, d), \mathsf{m}, \mathsf{n})$ *est une comonade faible monoïdale symétrique dans* $\mathcal{C}$.

Démonstration. Par la Proposition 5.2.22, on sait que (T, δ, d) est une comonade faible dans $\mathcal{C}$. Ensuite, on applique la Proposition 5.2.27 et les Lemmes 5.2.32 et 5.2.33. □

Théorème 5.2.35. $(((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d), c, w)$ *est un modèle de IMELL.*

Démonstration. Appliquer les Propositions 5.2.34, 5.2.28, 5.2.29, 5.2.30 et 5.2.31. □

Remarque 5.2.36. *Dans la preuve de ce théorème, on ne se sert jamais de l'objet dualisant* $\perp$*, donc, si l'on veut seulement un modèle de IMELL (au lieu d'un modèle de MELL), on n'a pas besoin de partir d'un modèle cocommutatif des réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs : il suffit d'avoir une catégorie monoïdale symétrique fermée* $\mathcal{C}$ *au lieu d'une catégorie* $*$*-autonome* $(\mathcal{C}, \perp)$.

Chapitre 6

Deux modèles relationnels

Dans ce chapitre, on présente deux modèles de la logique linéaire.

Le premier modèle, *le modèle relationnel des multiensembles finis* est un modèle bien connu depuis longtemps. On va voir que ce modèle peut être reconstruit en appliquant la formule de Taylor-Ehrhard à un certain modèle des réseaux différentiels (et pour cause, c'est la considération de modèles basés sur ce modèle de la logique linéaire qui a donné naissance aux réseaux différentiels). Ce qui n'était pas très bien connu, c'est une sémantique du lambda-calcul pur issu de ce modèle : nous avons découvert que cette sémantique était la même sémantique que celle construite dans [17] par Coppo, Dezani et Venneri (à quelque chose près). Eux partaient d'une syntaxe de types avec intersection pour construire une sémantique. Ici, on procède dans l'autre sens : on part d'une sémantique pour construire un système de types avec intersections. Cela permet d'éclairer d'un jour nouveau ces objets.

Le second modèle, *le modèle relationnel des suites finies* est le modèle non extensionnel qui a été donné en exemple au Chapitre 3. C'est la découverte de ce modèle qui a été la principale motivation du travail présenté dans le Chapitre 3 concernant les modèles catégoriques de la logique linéaire.

Ces deux modèles interprètent de la même manière le fragment multiplicatif additif.

6.1 L'interprétation relationnelle de MALL

Pour interpréter MLL, il suffit d'avoir une catégorie $*$-autonome. C'est le cas de $\mathcal{R} = (\mathbf{Rel}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \perp)$, où

- **Rel** est la catégorie des ensembles et relations,
  - la composition étant donnée par

$$g \circ f = \{(\alpha, \gamma) \,;\, \exists\beta\, ((\alpha,\beta) \in f \text{ et } (\gamma,\beta) \in g)\},$$

    avec $f \subseteq A \times B$ et $g \subseteq B \times C$;
  - et l'identité d'un objet étant $id_A = \{(\alpha, \alpha) \,;\, \alpha \in A\}$;
- $\otimes$ est le produit cartésien ensembliste (qui n'est pas le produit cartésien dans **Rel**, celui-ci étant la réunion disjointe) ;
- I est un singleton $\{*\}$;
- α, λ et ρ sont les isomorphismes canoniques : α consiste à déplacer des parenthèses et λ et ρ consistent à enlever des $*$;
- $\perp= I$, en conséquence de quoi, les interprétations d'une formule et de sa formule duale sont les mêmes (en particulier, l'interprétation du *par* est celle du *tenseur*).

Pour interpréter les additifs, il faut, en plus, que la catégorie soit cartésienne et cocartésienne : ici, le produit et le coproduit sont égaux, ils sont donnés par la réunion disjointe ; les unités (**T** et **0**) seront donc interprétées par l'ensemble vide.

6.2 Le modèle relationnel des multiensembles finis

Le modèle relationnel des multiensembles finis est un modèle *extensionnel* : on a donc à notre disposition une comonade monoïdale $((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d)$:

- T est le foncteur défini ainsi :
  - si A est un objet de **Rel**, $T(A) = \mathcal{M}_f(A)$, l'ensemble des multiensembles finis à support dans A ;
  - si $f \subseteq A \times B$, alors

$$T(f) = \{([\alpha_1, \dots, \alpha_n], [\beta_1, \dots, \beta_n])\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i\ (1 \leq i \leq n \Rightarrow (\alpha_i, \beta_i) \in f)\}\ ;$$

- pour tous objets A et B,

$$\begin{aligned} \mathsf{m}_{A,B} \quad = \quad & \{(([\alpha_1, \dots, \alpha_n], [\beta_1, \dots, \beta_n]), [(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)])\ ; \\ & n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \text{ et } \beta_1, \dots, \beta_n \in B\}\ ; \end{aligned}$$

- $\mathsf{n} = \{(*, [\underbrace{*, \dots, *}_{n \text{ fois}}])\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$;
- $\delta_A = \{(\sum_{i=1}^{n} a_i, [a_1, \dots, a_n])\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ et } a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}_f(A)\}$;
- et $d_A = \{([\alpha], \alpha)\ ;\ \alpha \in A\}$.

De plus, on a des transformations naturelles monoïdales c et w respectivement de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $\otimes \circ \Delta_C \circ (T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ et de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $*_C$ pour interpréter la contraction et l'affaiblissement :

- pour tout objet A, $c_A = \{(a_1 + a_2, [a_1, a_2])\ ;\ a_1, a_2 \in \mathcal{M}_f(A)\}$;
- pour tout objet A, $w_A = \{([], *)\}$.

On peut aussi interpréter les réseaux par des *expériences* : l'interprétation d'un réseau est l'ensemble des *résultats* des expériences d'un réseau. On adapte la définition de [45], une variante de [52].

Définition 6.2.1. *On définit, par induction sur la profondeur de π ce qu'est une expérience sur π. Une expérience e sur une structure de preuve π est une fonction associant à chaque nœud $!\,o$ à profondeur* 0 *un multiensemble $[e_1^o, \dots, e_k^o]$ d'expériences sur π^o et à chaque arête $a : A$ à profondeur* 0 *un élément de $[\![A]\!]$ de telle manière que les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *si a et b sont les conclusions d'un axiome à profondeur* 0*, alors $e(a) = e(b)$;*
- *si a et b sont les prémisses d'une coupure à profondeur* 0*, alors $e(a) = e(b)$;*
- *si c est la conclusion d'un $\parr$ ou d'un $\otimes$ à profondeur* 0 *ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) = (e(a), e(b))$;*
- *si c est la conclusion d'un nœud affaiblissement, alors $e(c) = []$;*
- *si c est la conclusion d'un nœud contraction ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) = e(a) + e(b)$;*
- *si c est la conclusion d'un nœud déréliction ayant a comme prémisse, alors $c = [e(a)]$;*
- *si a est une prémisse d'un nœud $!\,o$ et $e(o) = [e_1^o, \dots, e_k^o]$, alors pour la porte principale c de la boîte associée à o, $e(c) = [e_1^o(a), \dots, e_k^o(a)]$ et pour toute porte auxiliaire c, $e(c) = \sum_{j=1}^{k} e_j^o(c)$.*

Si $c_1, \dots, c_n, c$ sont les $n+1$ conclusions de π, alors on pose

$$[\![\pi]\!]_{c_1, \dots, c_n, c} = \{((e(c_1), \dots, e(c_n)), e(c))\ ;\ e \text{ est une expérience sur } \pi\}\ .$$

6.3 Une sémantique non-uniforme du lambda-calcul pur

On évite à dessein de parler de *modèle du lambda-calcul pur*, car le terme *lambda-model* désigne une sémantique du lambda-calcul pur qui a certaines propriétés supplémentaires... qui, comme on va le voir, ne sont pas vérifiées ici.

6.3.1 Interpréter les lambda-termes

D'après ce que l'on a vu dans le Chapitre 3, $\Lambda(\mathfrak{M})$ est une catégorie cartésienne fermée (équivalente à la catégorie $\mathbf{Rel}_{\mathbb{T}}$ de co-Kleisli de (T, δ, d)), où $\mathfrak{M}$ désigne ici le modèle de la logique linéaire de la section précédente et (T, δ, d) la comonade des multiensembles finis dans **Rel** que l'on a décrite. La catégorie $\Lambda(\mathfrak{M})$ fournit donc une sémantique du lambda-calcul simplement typé. Maintenant, pour avoir une sémantique du lambda-calcul pur, il suffit donc d'avoir un objet U de $\Lambda(\mathfrak{M})$ *réflexif*, c'est-à-dire tel que

$$(U \Rightarrow U) \lhd U \ \ ,$$

ce qui signifie qu'il existe $s \in \Lambda(\mathfrak{M})[U \Rightarrow U, U]$ et $r \in \Lambda(\mathfrak{M})[U, U \Rightarrow U]$ tels que $r \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} s = id_{U \Rightarrow U}^{\Lambda(\mathfrak{M})}$.

Lemme 6.3.1. *Soit i une injection d'un ensemble A vers un ensemble B. On pose*

$$g = \{([\alpha], i(\alpha))\ ;\ \alpha \in A\}$$

et

$$f = \{([i(\alpha)], \alpha)\ ;\ \alpha \in A\}\ \ .$$

Alors $\langle g \rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A \rangle, \langle B \rangle]$ et $\langle f \rangle$ est une rétraction de $\langle g \rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$.

Démonstration. $\langle g \rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A \rangle, \langle B \rangle]$ signifie que

(i) $g \in \mathbf{Rel}[\mathcal{M}_f(A), B]$;

(ii) et $g \circ T(id_A) = g$.

Comme, ici, T est un foncteur, la propriété (ii) est automatiquement satisfaite.

De même, il est clair que $\langle f \rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle B \rangle, \langle A \rangle]$.

La seule chose à vérifier est donc que l'on a bien $\langle f \rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle g \rangle = \langle d_A \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f \rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle g \rangle &= \langle f \circ_{\mathfrak{M}} \langle g \rangle \rangle \\ &= \langle f \circ T(g) \circ T(id_A) \circ \delta_A \rangle \\ &= \langle f \circ T(g) \circ \delta_A \rangle\ \ ; \end{aligned}$$

de plus, comme

$$T(g) \circ \delta_A = \{([\alpha_1, \ldots, \alpha_n], [i(\alpha_1), \ldots, i(\alpha_n)])\ ;\ \alpha \in A\}\ \ ,$$

on a

$$f \circ T(g) \circ \delta_A = \{([\alpha], [i(\alpha)])\ ;\ \alpha \in A\}\ \ .$$

□

On rappelle que, si D est un ensemble, alors, ici, $\langle D \rangle \Rightarrow \langle D \rangle = \langle \mathcal{M}_f(D) \times D \rangle$.

Désormais, on suppose que D est un ensemble non vide et que i est une injection de $\mathcal{M}_f(D) \times D$ vers D. On pose $g = \{([\alpha], i(\alpha))\ ;\ \alpha \in \mathcal{M}_f(D) \times D\}$ et $f = \{([i(\alpha)], \alpha)\ ;\ \alpha \in \mathcal{M}_f(D) \times D\}$. D'après ce que l'on vient de voir, on a

$$(\langle D \rangle \Rightarrow \langle D \rangle) \lhd \langle D \rangle$$

et, plus précisément, $\langle g\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle D\rangle \Rightarrow \langle D\rangle, \langle D\rangle]$ et f est une rétraction de g.

On peut donc définir l'interprétation d'un lambda-terme t.

Définition 6.3.2. *Pour tout $t \in \Lambda(\mathcal{P}(D))$, pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{V}$ distincts tels que $FV(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, on définit, par induction sur t, $[\![t]\!]_{x_1,\dots,x_n} \subseteq \Pi_{i=1}^n \mathcal{M}_f(D) \times D$:*

– *pour $x \in \mathcal{V}$, $[\![x_i]\!]_{x_1,\dots,x_n} = \{((\underbrace{[], \dots, []}_{i-1 \text{ fois}}, [\alpha], \underbrace{[], \dots, []}_{n-i \text{ fois}}), \alpha) \; ; \; \alpha \in D\}$;*

– *pour $c \in \mathcal{P}(D)$, $[\![c]\!]_{x_1,\dots,x_n} = c$;*

– $[\![\lambda x.u]\!]_{x_1,\dots,x_n} = \{((a_1, \dots, a_n), i(a, \alpha)) \; ; \; ((a_1, \dots, a_n, a), \alpha) \in [\![u]\!]_{x_1,\dots,x_n,x}\}$;

–

$$\begin{aligned}[\![(v)u]\!]_{x_1,\dots,x_n} \quad = \quad & \{((\sum_{k=0}^{p} a_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{p} a_n^k), \alpha) \; ; \\ & \textit{il existe } (\beta_1, \dots, \beta_p) \textit{ tels que } ((a_1^0, \dots, a_n^0), i([\beta_1, \dots, \beta_p], \alpha)) \in [\![v]\!]_{x_1,\dots,x_n} \\ & \textit{et, pour } 1 \leq j \leq p, ((a_1^j \dots a_n^j), \beta_j) \in [\![u]\!]_{x_1,\dots,x_n})\} \; ;\end{aligned}$$

avec les conventions $\Pi_{i=1}^n \mathcal{M}_f(D) \times D = D$ et $((a_1, \dots, a_n), \alpha) = \alpha$ si $n = 0$.

Maintenant, on peut aussi définir l'interprétation d'un lambda-terme t dans un environnement ρ.

Définition 6.3.3. *Pour tout tout $\rho \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{V}}$ et pour tout $t \in \Lambda(\mathcal{P}(D))$ tel que $FV(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$, on pose*

$$[\![t]\!]_\rho = \{\alpha \in D \; ; \; ((a_1, \dots, a_n), \alpha) \in [\![t]\!]_{x_1,\dots,x_n} \textit{ et, pour } 1 \leq i \leq n, a_i \in \mathcal{M}_f(\rho(x_i))\} \; .$$

Pour tous $d_1, d_2 \in \mathcal{P}(D)$, on pose $d_1 *^i d_2 = \{\alpha \in D \; ; \; \exists a \, (i(a, \alpha)) \in d_1 \text{ et } \mathrm{Supp}(a) \subseteq d_2\}$.

$(\mathcal{P}(D), *^i, [\![-]\!]_-)$ est une lambda-algèbre. Mais la proposition suivante, un corollaire de la Proposition 6.3.5, affirme que ce *n'est pas* un lambda-modèle. En particulier, $[\![t]\!]_\rho$ *ne peut pas* être défini par induction sur t.

Proposition 6.3.4. *La propriété suivante* n'est pas *satisfaite :*
pour tout $\rho \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{V}}$, pour tout $x \in \mathcal{V}$ et pour tous $t_1, t_2 \in \Lambda$, on a

$$(\forall d \in \mathcal{P}(D) \; [\![t_1]\!]_{\rho[x:=d]} = [\![t_2]\!]_{\rho[x:=d]} \Rightarrow [\![\lambda x.t_1]\!]_\rho = [\![\lambda x.t_2]\!]_\rho) \; .$$

Avant d'énoncer la Proposition 6.3.5, on rappelle qu'un objet A d'une catégorie $\mathbb{K}$ avec un objet terminal est dit *avoir suffisamment de points* si pour tout objet terminal 1 de $\mathbb{K}$ et pour tous $f, g \in \mathbb{K}[A, A]$, on a

$$(\forall x \in \mathbb{C}[1, A] \; f \circ_{\mathbb{C}} x = g \circ_{\mathbb{C}} x \Rightarrow f = g) \; .$$

Remarque : il ne s'en suit pas alors nécessairement que la même propriété est encore satisfaite pour tous $f, g \in \mathbb{K}[A, B]$[1].

Une notation qui peut être utile : si P est une partie de A, alors, pour tout $\langle f\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A\rangle, \langle B\rangle]$, on pose $f(P) = \{\beta \in B \; ; \; \exists h \, (\langle h\rangle = \langle f\rangle \circ_{\Lambda(\mathfrak{M})} \langle P\rangle \text{ et } (*, \beta) \in h)\}$, où $\langle P\rangle$ est la flèche de $\langle\rangle$ vers $\langle A\rangle$ dans $\Lambda(\mathfrak{M})$ définie par $\langle P\rangle = \langle\{(*, \alpha) \; ; \; \alpha \in P\}\rangle$.

Proposition 6.3.5. *Soit A un ensemble non vide. Alors $\langle A\rangle$ n'a pas suffisamment de points dans $\Lambda(\mathfrak{M})$.*

Démonstration. Soit A un ensemble non vide et soit $\alpha \in A$. On pose $f_1 = \{([\alpha], \alpha)\}$ et $f_2 = \{([\alpha, \alpha], \alpha)\}$. On a $\langle f_1\rangle, \langle f_2\rangle \in \Lambda(\mathfrak{M})[\langle A\rangle, \langle A\rangle]$ et pour toute partie P de A, on a $f_1(P) = f_2(P)$. □

[1] Penser, par exemple, au graphe qui a un unique sommet et aucune flèche : dans la catégorie **Graph** des graphes, cet objet n'a aucun point mais en a suffisamment.

6.3.2 Une sémantique *non uniforme*

L'exemple suivant illustre la non-uniformité de la sémantique.

Exemple 6.3.6. *On pose* $\mathbf{0} = \lambda x.\lambda y.y$ *et* $\mathbf{1} = \lambda x.\lambda y.x$. *Soit* $\gamma \in D$. *On pose* $\beta = ([\gamma], ([], \gamma))$. *Supposons que i est une inclusion. On a*

- $([([], ([\beta], \beta))], ([\beta], \beta)) \in [\![(x)\mathbf{1}]\!]_x$;
- *et* $([([\beta], ([], \beta))], \beta) \in [\![(x)\mathbf{10}]\!]_x$.

Donc on a $([([], ([\beta], \beta)), ([\beta], ([], \beta))], \beta) \in [\![\lambda x.((x)\mathbf{1})(x)\mathbf{10}]\!]$. *Dans une sémantique uniforme (comme dans [25]), ce point n'apparaîtrait pas dans la sémantique de ce lambda-terme, parce que* $[([], ([\beta], \beta)), ([\beta], ([], \beta))]$ *correspond à un argument imaginaire : l'argument est lu deux fois et fournit deux valeurs contradictoires.*

6.3.3 Des types avec intersection non idempotente

A partir de maintenant, $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, où D_n est défini par induction sur n : D_0 est un ensemble A non vide qui ne contient aucun couple et $D_{n+1} = A \cup (\mathcal{M}_f(D_n) \times D_n)$. On a $D = A \dot\cup (\mathcal{M}_f(D) \times D)$, où $\dot\cup$ est l'union disjointe ; i sera l'inclusion.

La Définition 6.3.2 définit $[\![t]\!]_{x_1,\ldots,x_n}$ pour $t \in \Lambda$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ distincts tels que $FV(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ et la Définition 6.3.3 définit $[\![t]\!]_\rho$ pour $t \in \Lambda$ et pour tout $\rho \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{V}}$. Maintenant, nous voulons mettre cette sémantique dans une cadre logique : les éléments de D sont vus comme des formules propositionnelles. Plus précisément, un multi-ensemble non vide est compris comme la conjonction uniforme de ses éléments. Remarquer que, intuitivement, cela signifie que nous considérons une conjonction commutative mais non-idempotente.

Système *R*

Un contexte Γ est une fonction de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{M}_f(D)$ telle que $\{x \in \mathcal{V} ; \Gamma(x) \neq []\}$ est fini. Si $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ sont distincts et $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}_f(D)$, alors $x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n$ est une notation pour le contexte $\{(x_i, a_i) ; 1 \leq i \leq n\} \cup \{(y, []) ; y \in \mathcal{V} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}\}$. On notera Φ l'ensemble des contextes. Pour $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \Phi$, poser $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \{(x, \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)) ; x \in \mathcal{V}\}$, où $+$ est une notation pour la somme des multi-ensembles donnée par l'addition terme à terme des multiplicités.

Définition 6.3.7. *Les règles de typage du Système R sont les suivantes :*

$$\frac{}{x : [\alpha] \vdash_R x : \alpha}$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash_R v : \alpha}{\Gamma \vdash_R \lambda x.v : (a, \alpha)}$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash_R v : ([\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \alpha) \qquad \Gamma_1 \vdash_R u : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_R u : \alpha_n}{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n \vdash_R (v)u : \alpha} \; n \in \mathbb{N}$$

La règle de typage de l'application a $n + 1$ prémisses. En particulier, dans le cas où $n = 0$, on obtient la règle suivante : $\dfrac{\Gamma_0 \vdash_R v : ([], \alpha)}{\Gamma_0 \vdash_R (v)u : \alpha}$ pour tout lambda-terme u. Donc le multiensemble vide joue le rôle du type universel ω.

L'intersection que nous considérons est *non idempotente* dans le sens suivant : si un terme t est typable de type $a_1 \ldots a_n\alpha$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Supp}(a'_i) = \mathrm{Supp}(a_i)$, il ne s'ensuit pas nécessairement que t est typable de type $a'_1 \ldots a'_n\alpha$. Par exemple, le système présenté dans [46] et le Système $\mathcal{D}$

presenté dans [35] considèrent des types idempotents. Le Système λ de [33] et le Système $\mathbb{I}$ de [44] considèrent des types non-idempotents, mais ne traitent pas l'affaiblissement de la même manière.

Il est intéressant de remarquer que le Système R peut être vu comme une reformulation du système de [17]. Plus précisément, les types du Système R correspondent à leurs types normalisés. D'après ce qui est énoncé dans la Section 5 de cet article, les auteurs ont pensé qu'une certaine propriété était satisfaite dans la sémantique correspondante ((assertion vi) de leur Théorème 8). Mais notre Proposition 6.3.4 montre que ce n'est pas le cas.

Les termes avec ressources

Nous définissons une relation d'équivalence sur les dérivations d'un lambda-terme donné.

Définition 6.3.8. *Pour tout lambda-terme t, pour toute dérivation Π de $\Gamma \vdash_R t : \alpha$, l'ensemble des dérivations Π' de $\Gamma' \vdash_R t : \alpha'$ telles que $\Pi \sim \Pi'$ est défini par induction sur Π de la manière suivante.*

- *Si Π est seulement une feuille, alors on a $\Pi \sim \Pi'$ si, et seulement si, Π' est aussi une feuille.*
- *Si Π se termine par la règle de typage de l'abstraction, alors la relation $\sim$ commute avec cette règle.*
- *Si*
$$\Pi = \frac{\begin{array}{c}\Pi_0\\ \Gamma_0 \vdash_R v : ([\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \alpha)\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \Gamma_1 \vdash_R u : \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\ldots\\ \ldots\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_n\\ \Gamma_n \vdash u : \alpha_n\end{array}}{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n \vdash_R (v)u : \alpha} ,$$
alors on a $\Pi \sim \Pi'$ si, et seulement si,
$$\Pi' = \frac{\begin{array}{c}\Pi'_0\\ \Gamma'_0 \vdash_R v : ([\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n], \alpha')\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi'_1\\ \Gamma'_1 \vdash_R u : \alpha'_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\ldots\\ \ldots\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi'_n\\ \Gamma'_n \vdash u : \alpha'_n\end{array}}{\Gamma'_0 + \Gamma'_1 + \ldots + \Gamma'_n \vdash_R (v)u : \alpha'} ,$$
$\Pi_0 \sim \Pi'_0$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\Pi_i \sim \Pi'_{\sigma(i)}$.

Une classe d'équivalence de dérivations d'un terme t dans le Système R peut être vu comme un terme avec ressources simple de la forme de t qui ne se réduit pas en 0. Le lambda-calcul avec ressources est défini dans [22] et est analogue aux lambda-calculs avec ressources précédemment introduits et étudiés dans [14] et [33]. Avant d'introduire le Système S, nous faisons quelques petits rappels sur les termes avec ressources.

La syntaxe des *termes simples* est définie par induction :

- si x est une variable, alors x est un terme simple ;
- si $v, u_1, \ldots, u_n$ sont $n + 1$ termes simples, avec $n \in \mathbb{N}$, alors $\langle v\rangle[u_1, \ldots, u_n]$ est un terme simple ;
- si v est un terme simple et x est une variable, alors $\lambda x.v$ est un terme simple, dans lequel la variable x est liée.

On note Δ l'ensemble des termes simples.

Pour tout lambda-terme t, on définit, par induction sur t, l'ensemble $\mathcal{T}(t)$ des termes simples de la forme de t :

- si t est une variable, alors $\mathcal{T}(t) = \{t\}$;
- si $t = \lambda x.u$, alors $\mathcal{T}(t) = \{\lambda x.s\ ;\ s \in \mathcal{U}\}$;
- si $t = (v)u$, alors $\mathcal{T}(t) = \{\langle s\rangle[s_1, \ldots, s_n]\ ;\ n \in \mathbb{N}, s \in \mathcal{T}(v) \text{ et } s_1, \ldots s_n \in \mathcal{T}(u)\}$.

Les termes avec ressources sont des sommes finies de termes simples. On note $\mathbb{N}\langle\Delta\rangle$ l'ensemble des termes avec ressources. Si $u = \sum_{i=1}^n s_i \in \mathbb{N}\langle\Delta\rangle$, alors on pose $\mathrm{Supp}(u) = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Si x est une variable et $v_1, \ldots, v_n$ sont n termes simples, alors on pose $\lambda x. \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \lambda x.v_i$. Si $v_1, \ldots, v_m$,

$u_1, \ldots, u_n$ sont $m+n$ termes simples, alors on pose $\langle \sum_{j=1}^{m} v_j \rangle [u_1, \ldots, u_n] = \sum_{j=1}^{m} \langle v_j \rangle [u_1, \ldots, u_n]$. Si s est un terme simple et $T_1, \ldots, T_n$ sont n multiensembles de termes simples, alors on pose $\langle s \rangle \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \langle s \rangle T_i$.

Pour tout $\sigma \in \Delta \cup \mathcal{M}_f(\Delta)$, pour tout terme simple t, on définit, par induction sur σ, $\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot t$:

– $\frac{\partial y}{\partial x} \cdot t = \begin{cases} t & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon} ; \end{cases}$
– $\frac{\partial \lambda y.s}{\partial x} \cdot t = \lambda y. \frac{\partial s}{\partial x} \cdot t$;
– $\frac{\partial \langle s \rangle [t_1, \ldots, t_n]}{\partial x} \cdot t = \langle \frac{\partial s}{\partial x} \cdot t \rangle [t_1, \ldots, t_n] + \langle s \rangle \frac{\partial [t_1, \ldots, t_n]}{\partial x} \cdot t$;
– $\frac{\partial [t_1, \ldots, t_n]}{\partial x} \cdot t = \sum_{i=1}^{n} [t_1, \ldots, t_{i-1}, \frac{\partial t_i}{\partial x} \cdot t, t_{i+1}, \ldots, t_n]$.

Maintenant, on définit une relation $\beta_\Delta \subseteq \Delta \times \mathbb{N}\langle \Delta \rangle$. On définit $\langle \lambda x.s \rangle [t_1, \ldots, t_n] \beta_\Delta v$ par induction sur n :

– si $n = 0$, alors on a $\langle \lambda x.s \rangle [t_1, \ldots, t_n] \beta_\Delta \begin{cases} s & \text{si } x \text{ n'est pas libre dans } s ; \\ 0 & \text{sinon} ; \end{cases}$
– on a $\langle \lambda x.s \rangle [t_1, \ldots, t_{n+1}] \beta_\Delta \langle \lambda x. \frac{\partial s}{\partial x} \cdot t_{n+1} \rangle [t_1, \ldots, t_n]$.

β_Δ est étendu à tous les contextes. On définit $\beta \subseteq \mathbb{N}\langle \Delta \rangle \times \mathbb{N}\langle \Delta \rangle$ ainsi : si, pour $1 \leq i \leq n$, on a $s_i \beta_\Delta \sum_{j=1}^{m_i} s_i'^{j}$, alors on a $\sum_{i=1}^{n} s_i \beta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} s_i'^{m_j}$.

β^* est la clôture réflexive transitive de β et on dira qu'un terme simple se réduit en un terme $\sum_{i=1}^{n} s_i'$ si l'on a $s \beta^* \sum_{i=1}^{n} s_i'$.

Nous introduisons un système de typage pour les *termes simples* : le Système S.

Définition 6.3.9. *Les règles de typage du système S sont les suivantes :*

$$\frac{}{x : [\alpha] \vdash_S x : \alpha}$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash_S v : \alpha}{\Gamma \vdash_S \lambda x.v : (a, \alpha)}$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash_S v : [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\alpha \qquad \Gamma_1 \vdash_S u_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_S u_n : \alpha_n}{\sum_{i=0}^{n} \Gamma_i \vdash_S \langle v \rangle [u_1, \ldots, u_n] : \alpha} \; n \in \mathbb{N}$$

Lemme 6.3.10. *Si $\Gamma_0, x : [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] \vdash_S s : \alpha$ et $\Gamma_1 \vdash_S t : \alpha_{n+1}$ sont dérivables et x n'apparaît pas dans t, alors il existe $s' \in Supp(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot t)$ tel que $\Gamma_0 + \Gamma_1, x : [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \vdash_S s' : \alpha$ est dérivable.*

Démonstration. Par induction sur s. □

Proposition 6.3.11. *Si $\Gamma \vdash_S \langle \lambda x.s \rangle [t_1, \ldots, t_n] : \alpha$ et $\langle \lambda x.s \rangle [t_1, \ldots, t_n] \beta_\Delta t'$, alors il existe $s' \in Supp(t')$ tel que $\Gamma \vdash_S s' : \alpha$.*

Démonstration. Dans le cas où $n = 0$, remarquer que ce système a la propriété remarquable suivante, qui *n'a pas* son pendant dans le Système R : si $\Gamma, x : [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \vdash_S s : \alpha$, alors le nombre d'occurrences libres de x dans s est n.

Sinon, appliquer le Lemme 6.3.10. □

En conséquence de quoi, si s est typable dans le Système S, alors s ne se réduit pas en 0.

Définition 6.3.12. *Etant donné un lambda-terme t, pour toute dérivation Π de $\Gamma \vdash_R t : \alpha$, on définit, par induction sur Π, $\mathsf{res}(\Pi) \in \mathcal{T}(t)$ tel que $\Gamma \vdash_S \mathsf{res}(\Pi) : \alpha$.*

– *Si t est une variable x, alors $\mathsf{res}(\Pi) = x$.*
– *Si Π est $\dfrac{\begin{matrix}\Pi' \\ \Gamma, x : a \vdash_R v : \alpha\end{matrix}}{\Gamma \vdash_R \lambda x.v : (a, \alpha)}$, alors $\mathsf{res}(\Pi) = \lambda x.\mathsf{res}(\Pi')$.*

– *Si* Π *est* $\dfrac{\begin{matrix}\Pi_0 \\ \Gamma_0 \vdash_R v : ([\alpha_1, \ldots, \alpha_n], \alpha)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_1 & \ldots & \Pi_n \\ \Gamma_1 \vdash_R u : \alpha_1 & \ldots & \Gamma_n \vdash_R u : \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_0 + \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_n \vdash_R (v)u : \alpha}$ *, alors* $\mathsf{res}(\Pi)$ *est* $\langle \mathsf{res}(\Pi_0) \rangle [\mathsf{res}(\Pi_1), \ldots, \mathsf{res}(\Pi_n)]$.

Puisqu'un terme simple typable ne se réduit pas en 0, pour tout lambda-terme t, res induit une bijection de l'ensemble des dérivations de t quotientées par $\sim$ sur l'ensemble des $s \in \mathcal{T}(t)$ tels que s ne se réduit pas en 0.

$|\Pi| = |\Pi'|$.

Définition 6.3.13. *Une substitution est une application de A vers D, qui a été étendue de manière naturelle en une application de D vers D.*

Proposition 6.3.14. *Soit* Π' *une dérivation de* $\Gamma' \vdash_R t : \alpha'$ *et soit s une substitution. Alors il existe une dérivation* Π *de* $s(\Gamma') \vdash_R t : s(\alpha')$ *telle que* $\Pi' \sim \Pi$.

Démonstration. Par induction sur t. □

Relier les types et la sémantique

Théorème 6.3.15. *Pour* $t \in \Lambda$ *tel que* $FV(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$*, on a :*

$$[\![t]\!]_{x_1,\ldots,x_n} = \{((a_1, \ldots, a_n), \alpha)\ ;\ x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \vdash_R t : \alpha\}$$

Démonstration. Par induction sur t. □

Théorème 6.3.16. *Pour* $t \in \Lambda$ *et pour* $\Gamma \in \Phi$*, on a*

$$\{\alpha\ ;\ \Gamma \vdash_R t : \alpha\} \subseteq \{\alpha\ ;\ \forall \rho \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{V}}\ (\forall x \in \mathcal{V}\ \Gamma(x) \in \mathcal{M}_f(\rho(x)) \Rightarrow \alpha \in [\![t]\!]^i_\rho)\}.$$

Démonstration. Appliquer le Théorème 6.3.15. □

Remarque 6.3.17. *L'inclusion inverse n'est pas vraie.*

Théorème 6.3.18. *Pour* $t \in \Lambda$ *et* $\rho \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{V}}$*, on a :*

$$[\![t]\!]_\rho = \{\alpha \in D\ ;\ \exists \Gamma\ (\forall x \in \mathcal{V}\ \Gamma(x) \in \mathcal{M}_f(\rho(x))\ et\ \Gamma \vdash_R t : \alpha)\}$$

Démonstration. Appliquer les Théorèmes 6.3.15 et 6.3.16. □

Il y a une autre manière de calculer l'interprétation des lambda-termes dans cette sémantique. En effet, il est bien connu que l'on peut traduire les lambda-termes dnas les réseaux de preuve de la logique linéaire étiquetés avec les types I, O, $?I$ et $!O$: cette traduction est définie par induction sur les lambda-termes. Maintenant, on peut faire des expériences pour calculer la sémantique du réseau de preuve : toutes les traductions correspondant au codage $A \Rightarrow B \equiv ?A^\perp \wp B$ ont la même sémantique. Et cette sémantique est la même que la sémantqiue définie ici.

Pour un aperçu des traductions des lambda-termes dans les réseaux de preuve, voir [28].

6.3.4 Propriétés de normalisation

Dans cette sous-section, inpirés par [35], nous prouvons deux théorèmes, qui formulent des relations *qualitatives* entre types assignables et propriétés de normalisation.

Proposition 6.3.19. *Pour tout terme normal t, il existe $\alpha \in D$ dans lequel* $[]$ *a seulement des occurrences négatives et* $\Gamma \in \Phi$ *dans lequel* $[]$ *a seulement des occurrences positives tels que* $\Gamma \vdash_R t : \alpha$. *Si, de plus, t ne commence pas par λ, alors, pour tout $\alpha \in D$ dans lequel* $[]$ *a seulement des occurrences ngatives, il existe* $\Gamma \in \Phi$ *dans lequel* $[]$ *a seulement des occurrences positives tel que* $\Gamma \vdash_R t : \alpha$.

Démonstration. Par induction sur t. □

Proposition 6.3.20. *Tout terme normalisable de tête est typable dans le Système R.*

Démonstration. Soit t un terme normalisable de tête. Il existe $k, n \in \mathbb{N}$, $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}$, $v_1, \ldots, v_n \in \Lambda$ tels que $(\lambda x_1. \ldots \lambda x_k.t)v_1 \ldots v_n =_\beta x$. Maintenant, x est typable. D'où $(\lambda x_1. \ldots \lambda x_k.t)v_1 \ldots v_n$ est typable. Donc $\lambda x_1. \ldots \lambda x_k.t$ est typable. □

Si $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont deux parties de Λ, alors $\mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ est une notation pour l'ensemble des λ-termes v tels que pour tout $u \in \mathcal{X}_1$, $(v)u \in \mathcal{X}_2$. Une partie $\mathcal{X}$ de Λ est saturée si pour $t_1, \ldots, t_n, u \in \Lambda$ et pour $x \in \mathcal{V}$, on a $((u[t/x])t_1 \ldots t_n \in \mathcal{X} \Rightarrow (\lambda x.u)tt_1 \ldots t_n \in \mathcal{X})$. Une interprétation est une application de A vers l'ensemble des ensembles saturés de Λ. Pour toute interprétation $\mathcal{I}$ et pour tout $\delta \in D \cup \mathcal{M}_f(D)$, on definit, par induction sur δ, un ensemble saturé $|\delta|_\mathcal{I}$ de Λ :
- si $\delta \in A$, alors $|\delta|_\mathcal{I} = \mathcal{I}(\delta)$;
- si $\delta = []$, alors $|\delta|_\mathcal{I} = \Lambda$;
- si $\delta = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]$, alors $|\delta|_\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{n+1} |\alpha_i|_\mathcal{I}$.
- si $\delta = (a, \alpha)$, alors $|\delta|_\mathcal{I} = |a|_\mathcal{I} \to |\alpha|_\mathcal{I}$.

Lemme 6.3.21. *Soit $\mathcal{I}$ une interprétation et soit $u \in \Lambda$ tel que* $x_1 : a_1, \ldots, x_k : a_k \vdash_R u : \alpha$. *Si* $t_1 \in |a_1|_\mathcal{I}, \ldots, t_k \in |a_k|_\mathcal{I}$, *alors* $u[t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k] \in |\alpha|_\mathcal{I}$.

Démonstration. Par induction sur u. □

Fait 6.3.22. *Pour tout terme t, pour toute variable x non libre dans t, si $(t)x$ est normalisable, alors t est normalisable.*

Démonstration. Par induction sur le nombre de réductions gauches de $(t)x$. □

Lemme 6.3.23. *Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes normalisables. On pose* $\mathcal{N}_0 = \{(x)t_1 \ldots t_n \, ; \, x \in \mathcal{V}, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{N}\}$ *et, pour $\gamma \in A$, on pose $\mathcal{I}(\gamma) = \mathcal{N}$. Pour $\alpha \in D$ avec seulement des occurrences positives (respectivement negatives) de* $[]$, *on a* $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_\mathcal{I}$ *(respectivement $|\alpha|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$).*

Démonstration. Par induction on α. Supposons $\alpha = (b, \beta) \in \mathcal{M}_f(D) \times D$;
- Si $[]$ a seulement des occurrences positives dans α, alors $[]$ a seulement des occurrences négatives (respectivement positives) dans b (respectivement dans β). Par hypothèse d'induction, on a $|b|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_0 \subseteq |\beta|_\mathcal{I}$. Donc on a $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N} \to \mathcal{N}_0 \subseteq |b|_\mathcal{I} \to |\beta|_\mathcal{I} = |\alpha|_\mathcal{I}$.
- Si $[]$ a seulement des occurrences négatives dans α, alors $[]$ a seulement des occurrences positives (respectivement négatives) dans b (respectivement dans β). Par hypothèse d'induction, on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |b|_\mathcal{I}$ et $|\beta|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}$. Donc $|\alpha|_\mathcal{I} = |b|_\mathcal{I} \to |\beta|_\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$ (cette dernière inclusion résultant du Fait 6.3.22).

□

Proposition 6.3.24. *Soient $t \in \Lambda$, $\alpha \in D$ dans lequel* [] *a seulement des occurrences négatives et* $\Gamma \in \Phi$ *dans lequel* [] *a seulement des occurrences positives tels que* $\Gamma \vdash_R t : \alpha$. *Alors t est normalisable.*

Démonstration. Supposons que Γ est le contexte $x_1 : a_1, \ldots, x_k : a_k$. Pour $\gamma \in A$, on pose $\mathcal{I}(\gamma) = \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des termes normalisables. Par le Lemme 6.3.21, on a $t = t[x_1/x_1, \ldots, x_k/x_k] \in |\alpha|_{\mathcal{I}}$. Et par le Lemme 6.3.23, on a $|\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$. □

Lemme 6.3.25. *Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des termes normalisables de tête. On pose $\mathcal{N}_0 = \{(x)t_1 \ldots t_n \; ; \; x \in \mathcal{V}, t_1, \ldots, t_n \in \Lambda\}$ et, pour $\gamma \in A$, on pose $\mathcal{I}(\gamma) = \mathcal{N}$. Pour tout $\alpha \in D$, on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$.*

Démonstration. Par induction sur α. Si $\alpha = (b, \beta)$, alors, par hypothèse d'induction, on a $\mathcal{N}_0 \subseteq |\beta|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_0 \subseteq |b|_{\mathcal{I}}$. D'où l'on a $\mathcal{N}_0 \subseteq \Lambda \to \mathcal{N}_0 \subseteq |\alpha|_{\mathcal{I}}$ et $|\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$. □

Proposition 6.3.26. *Tout terme typable dans le Système R est normalisable de tête.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{V}$, $a_1, \ldots, a_k$ tels que Γ est le contexte $x_1 : a_1, \ldots, x_k : a_k$. Pour $\gamma \in A$, on pose $\mathcal{I}(\gamma) = \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des termes normalisables de tête. Par le Lemme 6.3.21, on a $t = t[x_1/x_1, \ldots, x_k/x_k] \in |\alpha|_{\mathcal{I}}$. Et par le Lemme 6.3.25, on a $|\alpha|_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{N}$. □

Théorème 6.3.27. *Pour $t \in \Lambda$, t est normalisable si, et seulement si, il existe $\alpha \in D$ dans lequel* [] *a seulement des occurrences négatives et* $\Gamma \in \Phi$ *dans lequel* [] *a seulement des occurrences positives tels que* $\Gamma \vdash_R t : \alpha$.

Démonstration. Appliquer les Propositions 6.3.19 et 6.3.24. □

Théorème 6.3.28. *Pour $t \in \Lambda$, t est normalisable de tête si, et seulement si, t est typable dans le Système R.*

Démonstration. Appliquer les Propositions 6.3.20 et 6.3.26. □

Ce théorème n'est pas surprenant : bien que le Système R ne soit pas considéré dans [20], il est assez évident que sa puissance de typage est la même que celle des systèmes contenant Ω considérés par cet article. Nous pouvons remarquer ici une différence avec les Systèmes λ et $\mathbb{I}$ déjà mentionnés : dans ces systèmes, seuls les termes fortement normalisables sont typables.

6.4 Le modèle relationnel des suites finies

Le modèle relationnel des suites finies est un modèle *non extensionnel* : on a à notre disposition une comonade faible monoïdale $((T, \mathsf{m}, \mathsf{n}), \delta, d)$ qui *n'est pas* une comonade monoïdale :

- T est le semi-foncteur ainsi défini :
  - si A est un objet de **Rel**, $T(A) = A^{<\omega}$, l'ensemble des suites finies à valeurs dans A ;
  - si $f \subseteq A \times B$, alors

$$T(f) = \{(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)} \rangle) \; ; \; n \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \forall i \, (1 \leq i \leq n \Rightarrow (\alpha_i, \beta_i) \in f)\} \;\; ;$$

- pour tous objets A et B,

$$\begin{aligned} \mathsf{m}_{A,B} \;\; = \;\; & \{((\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle), \langle (\alpha_{\sigma(1)}, \beta_{\tau(1)}), \ldots, (\alpha_{\sigma(n)}, \beta_{\tau(n)}) \rangle) \; ; \\ & n \in \mathbb{N} \text{ et } \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A \text{ et } \beta_1, \ldots, \beta_n \in B\} \;\; ; \end{aligned}$$

– $\mathsf{n} = \{(*, \langle\underbrace{*, \ldots, *}_{n \text{ fois}}\rangle) \,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
– $\delta_A = \{(a, \langle a_1, \ldots, a_k\rangle) \,;\, k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)$ et $a_1, \ldots, a_k \in A^{<\omega}\}$;
– $d_A = \{(\langle\alpha\rangle, \alpha) \,;\, \alpha \in A\}$.

On rappelle que $\mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k)$ est l'ensemble des mélanges ("shuffles") de $a_1, \ldots, a_k$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_k) \\ = \quad & \{\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \,;\, \exists\sigma \in \mathfrak{S}_{p_1,\ldots,p_k}\ \forall i \in \mathbb{N}\ (1 \leq i \leq k \Rightarrow a_i = \langle\alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{i-1} p_j+1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(\sum_{j=1}^{i} p_j)}\rangle)\} \ , \end{aligned}$$

avec $\mathfrak{S}_{p_1,\ldots,p_k}$ l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{\sum_{j=1}^{k} p_j}$ telles que pour $1 \leq i \leq k$, σ est croissante sur l'intervalle $[(\sum_{j=1}^{i-1} p_j) + 1, \sum_{j=1}^{i} p_j]$.

De plus, on a des transformations naturelles monoïdales c et w respectivement de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $\otimes \circ \Delta_C \circ (T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ et de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ vers $*_C$ pour interpréter la contraction et l'affaiblissement :

– pour tout objet A, $c_A = \{(a, (a_1, a_2)) \,;\, a \in \mathfrak{S}(a_1, a_2)$ et $a_1, a_2 \in A^{<\omega}\}$;
– pour tout objet A, $w_A = \{(\langle\rangle, *)\}$.

On peut ici aussi interpréter les réseaux par des *expériences* :

Définition 6.4.1. *On définit, par induction sur la profondeur de π ce qu'est une expérience sur π. Une expérience e sur une structure de preuve π est une fonction associant à chaque nœud $!\ o$ à profondeur 0 un multiensemble $[e_1^o, \ldots, e_k^o]$ d'expériences sur π^o et à chaque arête $a : A$ à profondeur 0 un élément de $[\![A]\!]$ de telle manière que les conditions suivantes sont satisfaites :*

– *si a et b sont les conclusions d'un axiome à profondeur 0, alors $e(a) = e(b)$;*
– *si a et b sont les prémisses d'une coupure à profondeur 0, alors $e(a) = e(b)$;*
– *si c est la conclusion d'un $\wp$ ou d'un $\otimes$ à profondeur 0 ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) = (e(a), e(b))$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud affaiblissement, alors $e(c) = \langle\rangle$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud contraction ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) \in \mathfrak{S}(a, b)$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud déréliction ayant a comme prémisse, alors $c = \langle e(a)\rangle$;*
– *si a est une prémisse d'un nœud $!\ o$ et $e(o) = \langle e_1^o, \ldots, e_k^o\rangle$, alors pour la porte principale c de la boîte associée à o, $e(c) = \langle e_1^o(a), \ldots, e_k^o(a)\rangle$ et pour toute porte auxiliaire c, $e(c) \in \mathfrak{S}(e_1^o(c), \ldots, e_k^o(c))$.*

Remarque 6.4.2. *Cette définition est équivalente à la suivante, au sens où les expériences définies sont exactement les mêmes.*

On définit, par induction sur la profondeur de π ce qu'est une expérience sur π. Une expérience e sur une structure de preuve π est une fonction associant à chaque nœud $!\ o$ à profondeur 0 une suite finie *$\langle e_1^o, \ldots, e_k^o\rangle$ d'expériences sur π^o et à chaque arête $a : A$ à profondeur 0 un élément de $[\![A]\!]$ de telle manière que les conditions suivantes sont satisfaites :*

– *si a et b sont les conclusions d'un axiome à profondeur 0, alors $e(a) = e(b)$;*
– *si a et b sont les prémisses d'une coupure à profondeur 0, alors $e(a) = e(b)$;*
– *si c est la conclusion d'un $\wp$ ou d'un $\otimes$ à profondeur 0 ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) = (e(a), e(b))$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud affaiblissement, alors $e(c) = \langle\rangle$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud contraction ayant a et b comme prémisses, alors $e(c) \in \mathfrak{S}(a, b)$;*
– *si c est la conclusion d'un nœud déréliction ayant a comme prémisse, alors $c = \langle e(a)\rangle$;*
– *si a est une prémisse d'un nœud $!\ o$ et $e(o) = \langle e_1^o, \ldots, e_k^o\rangle$, alors pour la porte principale c de la boîte associée à o, $e(c) = \langle e_1^o(a), \ldots, e_k^o(a)\rangle$ et pour toute porte auxiliaire c, $e(c) \in \mathfrak{S}(e_1^o(c), \ldots, e_k^o(c))$.*

Si $c_1, \dots, c_n, c$ sont les $n+1$ conclusions de π, alors on pose

$$[\![\pi]\!]_{c_1,\dots,c_n,c} = \{((e(c_1), \dots, e(c_n)), e(c))\ ;\ e \text{ est une expérience sur } \pi\}\ .$$

Bien entendu, l'interprétation d'une preuve en calcul des séquents et celle de son réseau associé sont les mêmes. Pour le voir, remarquer que l'on a

$$\begin{aligned}
& \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \quad & \{((a_1, \dots, a_m), \langle (a_1^{\sigma_1(1)}, \dots, a_m^{\sigma_m(m)})\rangle, \dots, (a_1^{\sigma_1(k)}, \dots, a_m^{\sigma_m(k)})\rangle)\ ;\ k \in \mathbb{N},\ \sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathfrak{S}_k \\
& \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}\ (1 \leq j \leq m \Rightarrow (a_j^1, \dots, a_j^k \in A_j^{<\omega} \text{ et } a_j \in \mathfrak{S}(a_j^1, \dots, a_j^k)))\} \\
= \quad & \{((a_1, \dots, a_m), \langle (a_1^1, \dots, a_m^1), \dots, (a_1^k, \dots, a_m^k)\rangle)\ ;\ k \in \mathbb{N} \\
& \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}\ (1 \leq j \leq m \Rightarrow (a_j^1, \dots, a_j^k \in A_j^{<\omega} \text{ et } a_j \in \mathfrak{S}(a_j^1, \dots, a_j^k)))\}
\end{aligned}$$

et donc que, pour $f \in \mathbf{Rel}[\bigotimes_{j=1}^{m} T(A_j), B]$, on a

$$\begin{aligned}
& T(f) \circ \mathsf{m}_{\langle T(A_1),\dots,T(A_m)\rangle} \circ \bigotimes_{j=1}^{m} \delta_{A_j} \\
= \quad & \{((a_1, \dots, a_m), \langle \beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(k)}\rangle)\ ;\ k \in \mathbb{N},\ \sigma \in \mathfrak{S}_k \\
& \text{ et } \exists a_1^1, \dots, a_1^k \in A_1^{<\omega}, \dots, a_m^1, \dots, a_m^k \in A_m^{<\omega} \\
& (a_1 \in \mathfrak{S}(a_1^1, \dots, a_1^k), \dots, a_m \in \mathfrak{S}(a_m^1, \dots, a_m^k) \text{ et } \forall l \in \mathbb{N}\ (1 \leq l \leq k \Rightarrow ((a_1^l, \dots, a_m^l), \beta_l) \in f))\} \\
= \quad & \{((a_1, \dots, a_m), \langle \beta_1, \dots, \beta_k\rangle)\ ;\ k \in \mathbb{N} \\
& \text{ et } \exists a_1^1, \dots, a_1^k \in A_1^{<\omega}, \dots, a_m^1, \dots, a_m^k \in A_m^{<\omega} \\
& (a_1 \in \mathfrak{S}(a_1^1, \dots, a_1^k), \dots, a_m \in \mathfrak{S}(a_m^1, \dots, a_m^k) \text{ et } \forall l \in \mathbb{N}\ (1 \leq l \leq k \Rightarrow ((a_1^l, \dots, a_m^l), \beta_l) \in f))\}\ .
\end{aligned}$$

Enfin, voyons quelle relation entretiennent les additifs avec les multiplicatifs.

A défaut d'un isomorphisme naturel entre $T(A) \otimes T(B)$ et $T(A \& B)$, on sait que l'on peut définir un semi-isomorphisme naturel normal.

Pour tous objets A et B de **Rel**, on définit $\varphi_{A,B} \in \mathbf{Rel}[T(A) \otimes T(B), T(A\&B)]$ en posant

$$\varphi_{A,B} = T(((d_A \circ \rho_{TA} \circ (id_{TA} \otimes w_B))\&(d_B \circ \lambda_{TB} \circ (w_A \otimes id_{TB}))) \circ \Delta_{TA \otimes TB}) \circ \mathsf{m}_{TA,TB} \circ (\delta_A \otimes \delta_B)$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_{A,B} \quad = \quad & \{(((\langle \gamma_1, \dots, \gamma_p\rangle, \langle \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q}\rangle), \langle (\gamma_{\sigma(1)}, j(\sigma(1))), \dots, (\gamma_{\sigma(p+q)}, j(\sigma(p+q)))\rangle)\ ; \\
& \sigma \in \mathfrak{S}_{p+q},\ \gamma_1, \dots, \gamma_p \in A,\ \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q} \in B, \\
& j(k) = 1 \text{ si } 1 \leq \sigma(k) \leq p \text{ et } j(k) = 2 \text{ si } p+1 \leq \sigma(k) \leq p+q\}\ .
\end{aligned}$$

Pour tous objets A et B de **Rel**, on définit $\psi_{A,B} \in \mathbf{Rel}[T(A\&B), T(A) \otimes T(B)]$ en posant $\psi_{A,B} = (T(\pi_{A,B}^1) \otimes T(\pi_{A,B}^2)) \circ c_{A \times B}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_{A,B} \quad = \quad & \{(((\gamma_{\sigma(1)}, j(\sigma(1))), \dots, (\gamma_{\sigma(p+q)}, j(\sigma(p+q)))), (\langle \gamma_1, \dots, \gamma_p\rangle, \langle \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q}\rangle))\ ; \\
& p, q \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}, \gamma_1, \dots, \gamma_p \in A,\ \gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q} \in B, \\
& j(k) = 1 \text{ si } 1 \leq \sigma(k) \leq p \text{ et } j(k) = 2 \text{ si } p+1 \leq \sigma(k) \leq p+q\}\ .
\end{aligned}$$

6.5 Une cocontraction non commutative

Le modèle relationnel des suites finies peut être reconstruit à partir d'un modèle des réseaux différentiels via la formule de Taylor-Ehrhard.

Pour tout objet A de **Rel**, la bigèbre $(!A, \mu_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A)$ dans la catégorie $*$-autonome $\mathcal{R}$ est donnée par :

- $!A = A^{<\omega}$;
- $(!A, \Delta_A, \epsilon_A)$ est le comonoïde donné par le modèle relationnel des suites finies de la logique linéaire : $\Delta_A = c_A$ et $\epsilon_A = w_A$;
- $(!A, \mu_A, \eta_A)$ est le monoïde défini par
  - $\mu_A = coc_A = \{((a_1, a_2), a_1 * a_2)\ ;\ a_1,\ a_2 \in A^{<\omega}\}$, où $*$ est la concaténation de suites ;
  - $\epsilon_A = cow_A = \{(*, [])\}$.

De plus, pour tout objet A de **Rel**, on a deux morphismes $d_A \in \mathbf{Rel}[!A, A]$ et $cod_A \in \mathbf{Rel}[A, !A]$ qui vérifient les diagrammes de la Définition 4.2.1 :

- d_A est donné par le modèle relationnel des suites finies de la logique linéaire ;
- $cod_A = \{(*, \langle\alpha\rangle)\ ;\ \alpha \in A\}$.

On peut commencer par remarquer que la contraction est cocommutative (c'est la même que celle du modèle de la logique linéaire), alors que la cocontraction *n'est pas* commutative : si $\alpha_1,\ \alpha_2 \in A$, alors

$$((\langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle), \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle) \in coc_A \quad ,$$

mais

$$((\langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_1\rangle), \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle) \notin coc_A \quad .$$

On va voir que l'on peut récupérer le semi-foncteur T et le "digging" δ du modèle relationnel des suites finies de la logique linéaire.

Pour tout $g \in \mathbf{Rel}[T(A), B]$, on définit $g^T \in \mathbf{Rel}[T(A), T(B)]$ en posant

$$g^T = \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ g) \circ c_A^n) \quad .$$

On obtient

$$\begin{aligned} g^T \quad = \quad & \{(a, \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle)\ ; n \in \mathbb{N} \text{ et il existe } a_1, \ldots, a_n \in A^{<\omega} \text{ tels que} \\ & a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_n) \text{ et } \forall i\ (1 \leq i \leq n \Rightarrow (a_i, \beta_i) \in g)\} \quad . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $f \in \mathbf{Rel}[A, B]$, on a

$$\begin{aligned} (f \circ d_A)^T \quad = \quad & \{(a, \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle)\ ; n \in \mathbb{N} \text{ et il existe } a_1, \ldots, a_n \in A^{<\omega} \text{ tels que} \\ & a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_n) \text{ et } \forall i\ (1 \leq i \leq n \Rightarrow (a_i, \beta_i) \in f \circ d_A)\} \\ = \quad & \{(a, \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle)\ ; n \in \mathbb{N} \text{ et il existe } a_1, \ldots, a_n \in A^{<\omega} \text{ tels que} \\ & a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_n) \text{ et } \forall i\ (1 \leq i \leq n \Rightarrow (a_i = \langle\alpha_i\rangle \text{ et } (\alpha_i, \beta_i) \in f))\} \\ = \quad & \{(\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle, \langle\beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)}\rangle)\ ;\ n \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ et } \forall i\ (1 \leq i \leq n \Rightarrow (\alpha_i, \beta_i) \in f)\} \\ = \quad & T(f) \quad . \end{aligned}$$

Et, pour tout objet A de **Rel**, on a

$$\begin{aligned} {id_{T(A)}}^T &= \{(a, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle) \,;\, n \in \mathbb{N} \text{ et il existe } a_1, \ldots, a_n \in A^{<\omega} \text{ tels que} \\ &\quad a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_n) \text{ et } \forall i \, (1 \leq i \leq n \Rightarrow (a_i, \beta_i) \in id_{T(A)})\} \\ &= \{(a, \langle a_1, \ldots, a_n \rangle) \,;\, ; n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A^{<\omega} \text{ et } a \in \mathfrak{S}(a_1, \ldots, a_n)\} \\ &= \delta_A \ . \end{aligned}$$

Pour tous objets A et B de **Rel**, on pose

$$\mathsf{m}_{A,B} = \sum_n \frac{1}{n!} (coc^n_{A \otimes B} \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_{A \otimes B} \circ \sim^n_{(A,B)} \circ (\bigotimes_{i=1}^n d_A \otimes \bigotimes_{i=1}^n d_B) \circ (c^n_A \otimes c^n_B))$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \mathsf{m}_{A,B} &= \{((\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle), \langle (\alpha_{\sigma(1)}, \beta_{\tau(1)}), \ldots, (\alpha_{\sigma(n)}, \beta_{\tau(n)}) \rangle) \,; \\ &\quad n \in \mathbb{N},\ \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A,\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in B\} \ . \end{aligned}$$

On pose

$$\mathsf{n} = \sum_n \frac{1}{n!} (coc^n_I \circ \bigotimes_{i=1}^n cod_I \circ can^{-n})$$

et on obtient

$$\mathsf{n} = \{(*, \langle \underbrace{*, \ldots, *}_{n \text{ fois}} \rangle \,;\ n \text{ fois}\} \ .$$

6.6 Une sémantique non extensionnelle du lambda-calcul typé

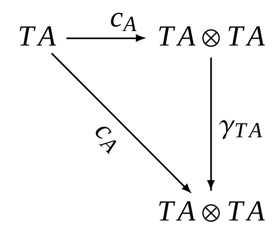
D'après le Théorème 3.3.37, on peut interpréter le lambda-calcul simplement typé dans $\Lambda(\mathfrak{M})$. On va voir que, ici, $\Lambda(\mathfrak{M})$ n'est pas une structure de catégorie cartésienne fermée.

En effet, posons $A = \{\alpha\}$ et $B = \{\beta_1, \beta_2\}$. On pose $\Lambda^{\langle B \rangle}_{\langle B \rangle \Rightarrow \langle A \rangle, \langle A \rangle}(ev_{\langle A \rangle, \langle B \rangle}) = \langle f \rangle$. On a $(\langle (\langle \beta_1, \beta_2 \rangle, \alpha) \rangle, (\langle \beta_2, \beta_1 \rangle, \alpha)) \in f$, donc $f \neq d_{B \Rightarrow A}$ et donc $\Lambda^{\langle B \rangle}_{\langle B \rangle \Rightarrow \langle A \rangle, \langle A \rangle}(ev_{\langle A \rangle, \langle B \rangle}) \neq id_{\langle B \rangle \Rightarrow \langle A \rangle}$.

Chapitre 7

Hic salta !

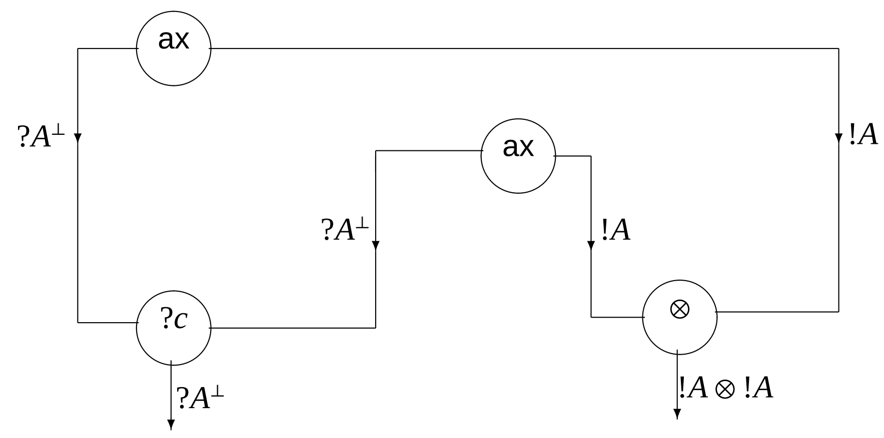
Dans les chapitres 5 et 6, les modèles des réseaux différentiels que nous considérions étaient supposés cocommutatifs. Rappelons que cela signifie que, pour tout objet A de $\mathbb{C}$, la bigèbre $(TA, coc_A, cow_A, c_A, w_A)$ dans la catégorie monoïdale symétrique $C = (\mathbb{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ est cocommutative, autrement dit, que le comonoïde (TA, c_A, w_A) dans C est cocommutatif, c'est-à-dire que le diagramme



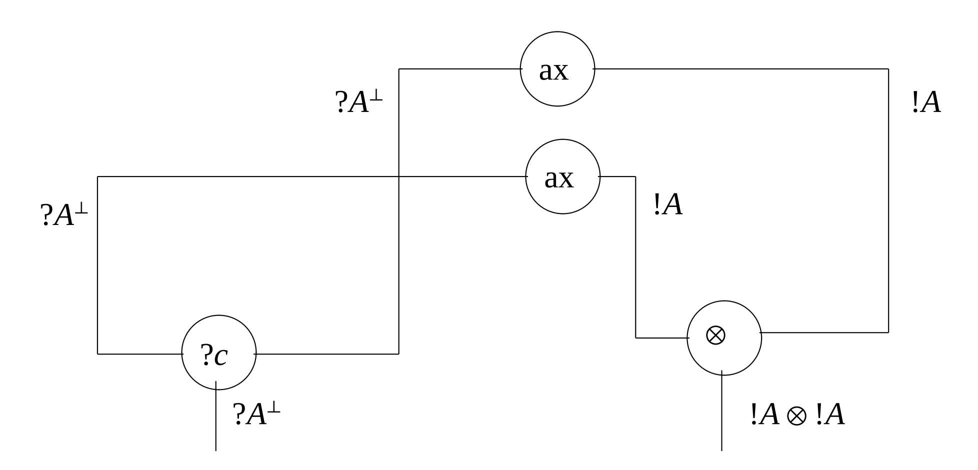
commute dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Nous avons vu, dans le chapitre 4, qu'il n'était nullement nécessaire de faire une telle hypothèse pour avoir un modèle des réseaux différentiels. Nous savons aussi qu'il existe des exemples de modèles ne vérifiant pas cette condition. Nous en venons naturellement à nous poser la question suivante : pouvons-nous nous passer également d'une telle hypothèse pour obtenir, en faisant une construction semblable à celle du chapitre 5, un modèle de la logique linéaire ?

Bien entendu, si l'on interprète la contraction par une contraction non cocommutative, on n'a aucune chance d'obtenir un modèle de la logique linéaire au sens de la Définition 3.3.2. On pourrait cependant peut-être donner une définition plus faible d'un modèle de la logique linéaire dans laquelle on ne supposerait plus que les contractions sont cocommutatives. Cela signifierait que les deux réseaux



et



ne sont plus identifiés. Cette définition garantirait que l'interprétation respecte l'élimination des coupures, quitte à ce que les deux réseaux ci-dessus aient des interprétations distinctes, quitte aussi à ce que la traduction de Girard ne donne plus une sémantique dénotationnelle du lambda-calcul (au sens où l'interprétation est invariante par bêta-réduction).

Mais, en réalité, ce serait une erreur de penser que si, dans notre construction, nous avons supposé que nos bigèbres étaient cocommutatives, c'était uniquement parce que nous voulions que, dans les modèles de la logique linéaire ainsi construits, les contractions fussent cocommutatives. Si tel était le cas, il serait légitime de penser que l'on peut, de manière analogue, sans supposer la cocommutativité des contractions, quitte, éventuellement, à supposer la commutativité des cocontractions, obtenir des modèles de la logique linéaire tels que ceux auxquels nous avons fait allusion au paragraphe précédent. Il n'en est rien. La raison en est que la logique linéaire ne respecte plus la parfaite symétrie des réseaux différentiels : en logique linéaire, non seulement, pour interpréter les exponentielles, il faut une comonade tandis qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une monade, mais, en plus, il existe une contraction qui peut être coupée avec une boîte tandis qu'il n'existe pas de cocontraction. Il n'y a donc aucune raison de penser *a priori* que si l'on a pu se passer de la commutativité des cocontractions, on pourra se passer de la cocommutativité des contractions. Voyons ce qu'il en est.

Dans le chapitre 5, on a défini, pour tout $f \in \mathbb{C}[A, B]$, $T(f) \in \mathbb{C}[TA, TB]$ en posant

$$T(f) = \sum_n \frac{1}{n!}(coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ c_A^n) \ .$$

On a montré (Lemme 5.2.15) que T définissait un semi-endofoncteur de $\mathbb{C}$. Pour cela, l'hypothèse de la cocommutativité de c_A était-elle indispensable ? Absolument pas. En regardant la preuve, le lecteur pourra vérifier qu'il suffisait d'avoir la cocommutativité de c_A ou la commutativité de coc_B. On peut même se passer de l'une et de l'autre si l'on pose

$$T(f) = \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_B^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_B \circ \bigotimes_{i=1}^{n}(cod_B \circ f \circ d_A) \circ \sigma_{TA} \circ c_A^n) \ .$$

Il est clair que si l'on suppose la cocommutativité de c_A ou la commutativité de coc_B, on retrouve la définition précédente. On appellera *modèle extensionnel des réseaux différentiels* un modèle des réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs tels que le semi-foncteur T défini par cette formule est un endofoncteur de la catégorie $\mathbb{C}$.

7.1 A propos de l'extensionnalité

On a déjà vu (voir la Section 6.4 du Chapitre 6) que, même dans le cas cocommutatif, il n'y a aucune raison pour que T soit un endofoncteur de $\mathbb{C}$. Par contre, il vaut la peine de remarquer que si l'on part d'un modèle des réseaux différentiels avec sommes infinies et coefficient réels positifs sans supposer la cocommutativité des contractions ni la commutativité des cocontractions et que si, en définissant T comme ci-dessus, T est un endofoncteur de $\mathbb{C}$, alors les contractions sont nécessairement cocommutatives et les cocontractions nécessairement commutatives. C'est ce que montre la proposition suivante.

Proposition 7.1.1. *Pour tout objet A de $\mathbb{C}$, si $T(id_A) = id_{TA}$, alors la bigèbre $(TA, coc_A, cow_A, c_A, w_A)$ est commutative et cocommutative.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
coc_A &= id_{TA} \circ coc_A \\
&= T(id_A) \circ coc_A \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \sigma_A \circ \bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n \circ coc_A) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} \\
&\quad (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \sigma_A \circ \sigma'_A \circ (\alpha_A^{(n_1,n_2)})^{-1} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A \circ c_A^{n_1}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A \circ c_A^{n_2}))) \\
&\quad \text{(par le Lemme 5.2.11)} \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \sigma_A \circ \sigma'_A \circ (\alpha_A^{(n_1,n_2)})^{-1} \circ \gamma_{\bigotimes_{i=1}^{n_2} A, \bigotimes_{i=1}^{n_1} A} \\
&\quad \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A \circ c_A^{n_2}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A \circ c_A^{n_1}))) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}(n_1,n_2)} \\
&\quad (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \sigma_A \circ \sigma'_A \circ (\alpha_A^{(n_1,n_2)})^{-1} \circ ((\bigotimes_{i=1}^{n_1} d_A \circ c_A^{n_1}) \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n_2} d_A \circ c_A^{n_2})) \circ \gamma_{T(A)}) \\
&= \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (coc_A^n \circ \bigotimes_{i=1}^{n} cod_A \circ \circ \sigma_A \circ \bigotimes_{i=1}^{n} d_A \circ c_A^n \circ coc_A \circ \gamma_{TA}) \\
&\quad \text{(par le Lemme 5.2.11)} \\
&= T(id_A) \circ coc_A \circ \gamma_{TA} \\
&= id_{TA} \circ coc_A \circ \gamma_{TA} \\
&= coc_A \circ \gamma_{TA}
\end{aligned}$$

□

Autrement dit, on a montré le théorème suivant.

Théorème 7.1.2. *Tout modèle extensionnel des réseaux différentiels est un modèle cocommutatif et commutatif.*

Cela signifie que si l'on n'a pas besoin de la commutativité de la cocontraction pour obtenir un modèle de la logique linéaire au sens de la Définition 3.3.2, elle est nécessaire si l'on veut obtenir un modèle *extensionnel* de la logique linéaire (un modèle au sens de Benton-Bierman-Hyland-de Paiva).

7.2 Une contraction non cocommutative ?

La commutativité de la cocontraction suffit certes à obtenir un semi-foncteur T de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Pour autant, on est loin d'avoir obtenu un modèle de la logique linéaire. On va voir que, en fait, même en supposant la commutativité de la cocontraction, si on ne suppose pas la cocommutativité de la contraction, la formule de Taylor-Ehrhard ne respecte pas l'élimination des coupures : on va exhiber un contre-exemple dans lequel l'interprétation ne sera pas invariante au cours de l'élimination des coupures.

Ce contre-exemple provient de l'Exemple 4.2.2 et de la Proposition 4.2.3. On considère à nouveau la catégorie $*$-autonome $(\mathcal{R}, \perp)$, où $\mathcal{R}$ est la catégorie monoïdale symétrique fermée $(\mathbf{Rel}, \ldots)$. Etant donné un ensemble A contenant au moins deux éléments α_1 et α_2, $(A^{<\omega}, {\Delta_A}^*, {\epsilon_A}^*, {\mu_A}^*, {\eta_A}^*)$ est une bigèbre commutative et non cocommutative, où μ_A, η_A, Δ_A et ϵ_A sont tels que définis dans les Exemples 4.1.9 et 4.2.2, et où f^*, pour f un morphisme de C vers D dans la catégorie $\mathbf{Rel}$, désigne le morphisme de D vers C dans la catégorie $\mathbf{Rel}$ défini par $f^* = \{(\beta, \alpha) \,;\, (\alpha, \beta) \in f\}$. Considérons donc le modèle des réseaux différentiels $((\mathcal{R}, \perp), (T'_A)_{A \in ob(\mathbf{Rel})})$, avec

$$T'_A = (A^{<\omega}, {\Delta_A}^*, {\epsilon_A}^*, {\mu_A}^*, {\eta_A}^*, {d_A}^*, {cod_A}^*) \ ,$$

où μ_A, η_A, Δ_A, ϵ_A, cod_A et d_A sont tels que définis dans l'Exemple 4.2.2. Définissons le semi-foncteur T' et δ'_A par la formule de Taylor-Ehrhard : si f est un morphisme de C vers D dans la catégorie $\mathbf{Rel}$, alors

$$T'(f) = (f \circ {cod_A}^*)^T = \sum_n \frac{1}{n!} ({c_A}^{*n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} ({d_A}^* \circ f \circ {cod_A}^*) \circ {coc_A}^{*n}) \ ;$$

par ailleurs,

$$\delta'_A = {id_{T(A)}}^T = \sum_n \frac{1}{n!} ({c_A}^{*n} \circ \bigotimes_{i=1}^{n} {d_A}^* \circ {coc_A}^{*n}) \ .$$

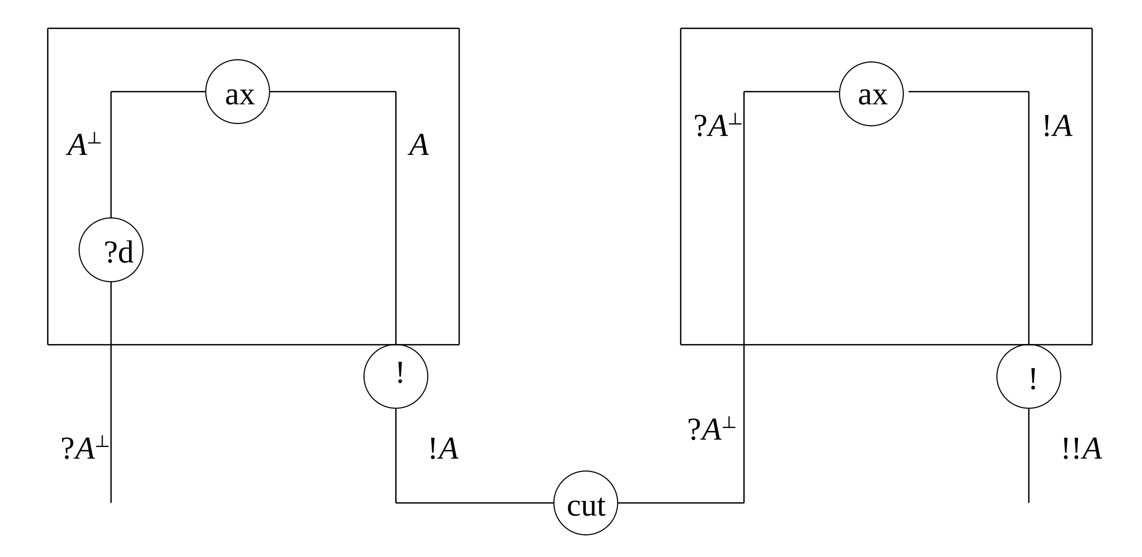
Tout d'abord, remarquons que le semi-foncteur T' ainsi défini est le même que le semi-foncteur T défini à partir du modèle des réseaux différentiels de départ :

$$T'(f) = \{(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \beta_{\sigma(1)}, \ldots, \beta_{\sigma(n)} \rangle) \,;\, n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall i (1 \leq i \leq n \Rightarrow (\alpha_i, \beta_i) \in f) \text{ et } \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \ .$$

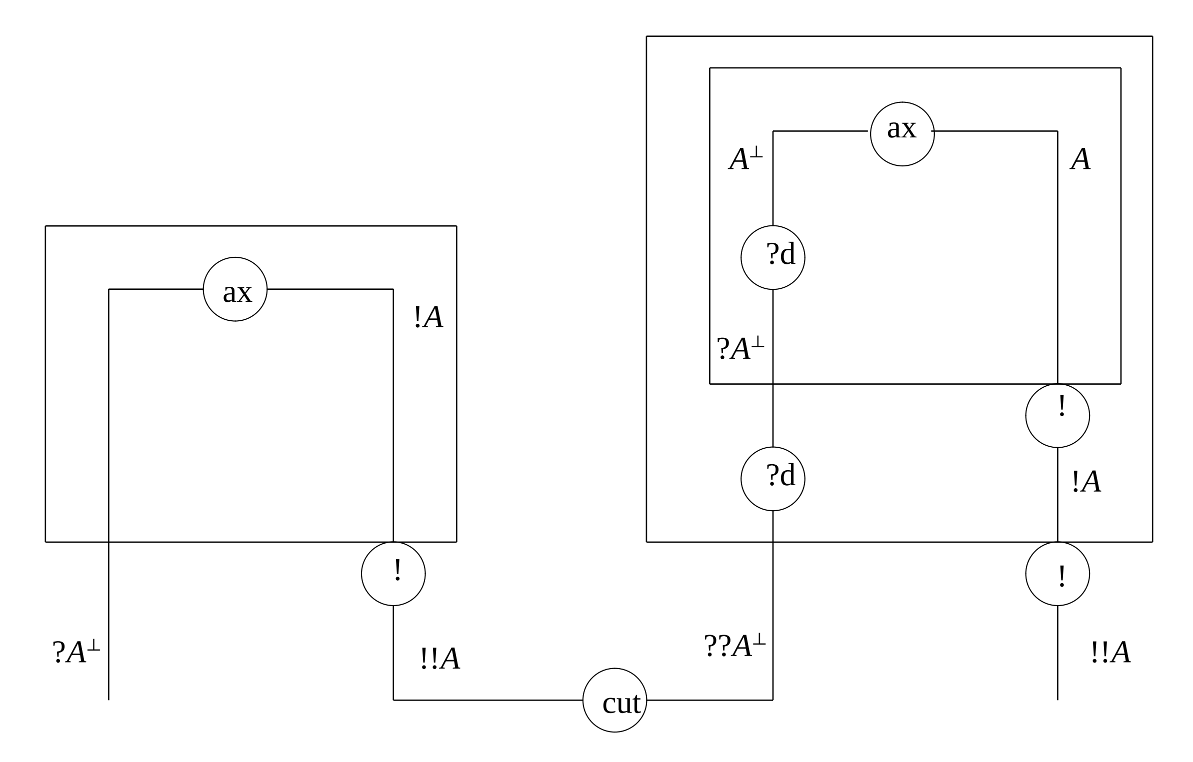
Maintenant, on peut constater que si A est un ensemble contenant au moins trois éléments α_1, α_2 et α_3, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T'(A) & \xrightarrow{\delta'_A} & T' \circ T'(A) \\ {\scriptstyle T'(id_A)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle T' \circ T'(id_A)} \\ T'(A) & \xrightarrow[\delta'_A]{} & T' \circ T'(A) \end{array}$$

ne commute pas dans la catégorie $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que les deux réseaux



et



n'ont pas la même interprétation. Pour le voir, remarquer que l'on a $\langle\langle\alpha_1, \alpha_3\rangle, \langle\alpha_2\rangle\rangle \in \delta'_A \circ T'(id_A)$ et que l'on n'a pas $\langle\langle\alpha_1, \alpha_3\rangle, \langle\alpha_2\rangle\rangle \in (T' \circ T'(id_A)) \circ \delta'_A$. Or les deux réseaux se réduisent tous deux en le même réseau.

On peut donc conclure que la commutativité de la cocontraction n'est pas suffisante pour obtenir un modèle de la logique linéaire en passant par la formule de Taylor-Ehrhard, au sens où l'interprétation reste invariante au cours de l'élimination des coupures. On peut cependant interpréter les réseaux et se demander comment se comporte l'interprétation au cours de la réduction.

Ici, pour l'exemple particulier que nous avons vu, on se contentera de conjecturer la propriété suivante : si π se réduit en π', alors l'interprétation de π' est incluse dans celle de π.

Si l'on voulait faire rentrer ce genre d'interprétations dans un cadre catégorique, peut-être faudrait-il considérer des 2-catégories, dans lesquelles l'élimination des coupures correspondrait à une 2-flèche ... ?

Deuxième partie

Temps de calcul via sémantique et types avec intersection

“*Le temps est une invention des hommes incapables d’aimer.*”
Invariance

Chapitre 8

La machine de Krivine

Le but du travail présenté dans ce chapitre est d'obtenir des informations sur le temps d'exécution des lambda-termes à travers la sémantique. Quand on parle de temps d'exécution, on veut parler du nombre d'étapes dans un modèle de calcul.

La sémantique que nous considérons est la lambda-algèbre présentée dans la Section 6.3 dans le cas particulier où $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ avec $D_0 = A$, un ensemble non vide qui ne contient aucun couple, et $D_{n+1} = A \cup (\mathcal{M}_f(D_n) \times D_n)$ et l'injection i de $\mathcal{M}_f(D) \times D$ vers D est l'inclusion.

L'article [46] a présenté une procédure qui calcule la forme normale d'un lambda-terme (si elle existe) en trouvant son typage principal (s'il existe). Ici, nous présentons des résultats quantitatifs sur la relation entre les types et ce calcul de la forme normale. Comme dans [22], le modèle de calcul considéré sera la machine de Krivine. Nous introduisons deux variantes de cette machine qui implantent la réduction linéaire de tête.

La première (Définition 8.1.6) calcule la forme normale de tête principale d'un lambda-terme (si elle existe) : nous prouvons que le nombre d'étapes d'exécution est la taille de la plus petite dérivation du lambda-terme dans le Système R (Théorème 8.1.22) et, comme corollaire, nous bornons le nombre d'étapes par la taille des points de la sémantique (Théorème 8.1.29) ; une relation plus précise entre sémantique et temps d'exécution est donnée dans le Théorème 8.1.30.

La seconde (Définition 8.2.1) calcule la forme normale d'un lambda-terme (si elle existe) : nous bornons le nombre d'étapes d'exécution (Théorème 8.2.7) et prouvons que, si ce nombre est fini, il existe une dérivation de son typage principal dont la taille est précisément égal à ce nombre (Théorème 8.2.9) ; on obtient alors le Corollaire 8.2.10, un résultat similaire au Théorème 8.1.22 ; des résultats similaires aux Théorèmes 8.1.29 et 8.1.30 sont donnés dans les Théorèmes 8.2.11 et 8.2.12.

8.1 Une machine calculant la forme normale de tête principale

Nous introduisons une variante d'une machine présentée dans [34] qui implante l'appel par nom. Plus précisément, la machine originale réalise la réduction linéaire de tête faible, tandis que notre machine réalise la réduction linéaire de tête.

8.1.1 Etats de la machine

Nous commençons par les définitions de l'ensemble $\mathcal{E}$ des environnements et de l'ensemble $\mathcal{C}$ des clôtures. On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_p$ $\mathcal{C} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_p$, où $\mathcal{E}_p$ et $\mathcal{C}_p$ sont définis par induction sur p :

– Si $p = 0$, alors $\mathcal{E}_p = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{C}_p = \Lambda \times \{\emptyset\}$.

– $\mathcal{E}_{p+1}$ est l'ensemble des applications partielles finies de $\mathcal{V}$ vers C_p et $C_{p+1} = \Lambda \times \mathcal{E}_{p+1}$.

Pour $e \in \mathcal{E}$, $d(e)$ est une notation pour le plus petit entier p tel que $e \in \mathcal{E}_p$.

Pour $c = (t, e) \in C$, on définit, par induction sur $d(e)$, $\overline{c} = t[e] \in \Lambda$:

– Si $d(e) = 0$, alors $t[e] = t$.
– Supposons $t[e]$ défini pour $d(e) = d$. Si $d(e) = d + 1$, alors $t[e] = t[\overline{c_1}/x_1, \ldots, \overline{c_n}/x_n]$, avec $\{x_1, \ldots, x_n\} = \mathsf{dom}(e)$ et, pour $1 \leq i \leq n$, $e(x_i) = c_i$.

Une *pile* est une suite finie de clôtures. Si c est une clôture et $\pi = (c_1, \ldots, c_q)$ est une pile, alors $c.\pi$ est une notation pour la pile $(c, c_1, \ldots, c_q)$. On notera ϵ la pile vide.

Un *état* est un couple (c, π), où c est une clôture et π est une pile. On notera $\mathbb{S}$ l'ensemble des états. Si $s = (c_0, (c_1, \ldots, c_q)) \in \mathbb{S}$, alors $\overline{s}$ est une notation pour le lambda-terme $(\overline{c_0})\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$. Cette application $s \mapsto \overline{s}$ peut être étendue naturellement en une application de $\mathbb{S}$ vers $\mathcal{K}$.

Définition 8.1.1. *On dit qu'un lambda-terme t respecte la convention sur les variables si une variable est liée au plus une fois dans t.*

Pour tout $c = (t, e) \in C$, on définit, par induction sur $d(e)$, ce que signifie que c respecte la convention sur les variables :

– *si $d(e) = 0$, alors on dit que c respecte la convention sur les variables si, et seulement si, t respecte la convention sur les variables ;*
– *si $c = (t, \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\})$ avec $n \neq 0$, alors on dit que c respecte la convention sur les variables si, et seulement si,*
  – *$c_1, \ldots, c_n$ respectent la convention sur les variables ;*
  – *et les variables $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas liées dans t.*

Pour tout $s = (c_0, (c_1, \ldots, c_q)) \in \mathbb{S}$, on dit que s respecte la convention sur les variables si, et seulement si, $c_0, \ldots, c_q$ respectent la convention sur les variables.

8.1.2 Exécution

D'abord, nous présentons l'exécution d'un état. Elle consiste à mettre à jour une clôture (t, e) et la pile. Si t est une application $(v)u$, alors on empile la clôture (u, e) et la nouvelle clôture courante est (v, e). Si t est une abstraction, alors une clôture est dépilée et un nouvel environnement est créé. Si t est une variable, alors la clôture courante est maintenant la valeur de la variable dans l'environnement.

Définition 8.1.2. *Pour $s = ((t, e), \pi) \in \mathbb{S}$ respectant la convention sur les variables et $s' \in \mathbb{S}$, nous définissons $s \succ_{\mathbb{S}} s'$:*

– *si $t \in \mathcal{V}$, alors :*
  – *si $t \in \mathsf{dom}(e)$, alors $s' = (e(t), \pi)$;*
  – *sinon, $s \succ_{\mathbb{S}} s'$ est faux pour tout s' ;*
– *si $t = \lambda x.u$, alors :*
  – *si π est la pile vide ϵ, alors $s \succ_{\mathbb{S}} s'$ est faux pour tout s' ;*
  – *si $\pi = c.\pi'$, alors $s' = ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi')$;*
– *si $t = (v)u$, alors $s' = ((v, e), (u, e).\pi)$.*

Remarque 8.1.3. – *Si $s \in \mathbb{S}$ respecte la convention sur les variables et $s \succ_{\mathbb{S}} s'$, alors s' respecte la convention sur les variables.*

– *Si $s = ((\lambda x.u, e), c.\pi') \in \mathbb{S}$ respecte la convention sur les variables, alors on a bien*

$$\{(x, c)\} \cup e \in \mathcal{E} \ .$$

Remarquer que dans le cas où le sous-terme courant est une abstraction et la pile est vide, la machine s'arrête. Maintenant, nous étendons la machine de telle manière qu'elle exécute la réduction d'éléments de $\mathcal{K}$, où $\mathcal{K} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$ avec

– $\mathcal{H}_0 = \mathcal{V}$ et $\mathcal{K}_0 = \mathbb{S}$;
– $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{V} \cup \{(v)u; v \in \mathcal{H}_n$ et $u \in \Lambda \cup \mathcal{K}_n\}$ et $\mathcal{K}_{n+1} = \mathbb{S} \cup \mathcal{H}_n \cup \{\lambda y.k\ ;\ y \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathcal{K}_n\}$.

On pose $\mathcal{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$. On a $\mathcal{K} = \mathbb{S} \cup \mathcal{H} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\lambda x.k\ ;\ x \in \mathcal{V}$ et $k \in \mathcal{K}_n\}$.

Remarque 8.1.4. *On a*

– $\mathcal{H} = \{(x)t_1 \dots t_p\ ;\ p \in \mathbb{N},\ x \in \mathcal{V},\ t_1, \dots, t_p \in \Lambda \cup \mathcal{K}\}$
– *et donc tout élément de $\mathcal{K}$ s'écrit soit sous la forme*

$$\lambda x_1. \dots \lambda x_m.s \text{ avec } m \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in \mathcal{V} \text{ et } s \in \mathbb{S}$$

soit sous la forme

$$\lambda x_1. \dots \lambda x_m.(x)t_1 \dots t_p \text{ avec } m, p \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_m \in \mathcal{V} \text{ et } t_1, \dots, t_p \in \mathcal{K} \cup \Lambda.$$

Pour $k \in \mathcal{K}$, $d(k)$ est une notation pour le plus petit entier p tel que $k \in \mathcal{K}_p$.

On étend la définition de $\overline{s}$ pour $s \in \mathbb{S}$ à $\overline{k}$ pour $k \in \mathcal{K}$. Pour cela, on va poser $\overline{t} = t$ si $t \in \Lambda$. Cette définition se fait par induction sur $d(k)$:

– si $d(k) = 0$, alors $k \in \mathbb{S}$ et donc $\overline{k}$ est déjà défini ;
– si $k \in \mathcal{H}$, alors il y a deux cas :
  – si $k \in \mathcal{V}$, alors $\overline{k}$ est déjà défini (c'est k) ;
  – sinon, $k = (v)u$ et on pose $\overline{k} = (\overline{v})\overline{u}$;
– si $k = \lambda x.k_0$, alors $\overline{k} = \lambda x.\overline{k_0}$.

On étend la Définition 8.1.1 aux éléments de $\mathcal{K}$.

Définition 8.1.5. *Pour tout $k \in \mathcal{K}$, on définit, par induction sur k, ce que signifie que k respecte la convention sur les variables :*

– *si $k \in \mathbb{S}$, alors k respecte la convention sur les variables si, et seulement si, k respecte la convention sur les variables au sens de la Définition 8.1.1 ;*
– *si $k \in \mathcal{H}$, alors il y a deux cas :*
  – *si $k \in \mathcal{V}$, alors k respecte la convention sur les variables ;*
  – *sinon, $k = (v)u$ et k respecte la convention sur les variables si, et seulement si, v et u respectent la convention sur les variables ;*
– *si $k = \lambda x.k_0$, alors k respecte la convention sur les variables si, et seulement si, k_0 respecte la convention sur les variables.*

Définition 8.1.6. *Pour $k, k' \in \mathcal{K}$, où k respecte la convention sur les variables, nous définissons $k \succ_\eta k'$, :*

– *si $k \in \mathbb{S}$, alors il y a trois cas :*
  – *si $k = ((x, e), (c_1, \dots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathsf{dom}(e)$, alors $k' = (x)\overline{c_1} \dots \overline{c_q}$;*
  – *si $k = ((\lambda x.u, e), \pi)$ et π est la pile vide, alors $k' = \lambda x.((u, e), \epsilon)$;*
  – *sinon $k \succ_{\mathbb{S}} k'$;*
– *si $k \in \mathcal{H}$, alors $k \succ_\eta k'$ est faux pour tout k' ;*
– *si $k = \lambda y.k_0$, alors $k' = \lambda y.k'_0$ avec $k_0 \succ_\eta k'_0$.*

Une différence avec la machine originale est que notre machine réduit sous les lambdas.

$\succ_\eta^*$ est une notation pour la clôture réflexive transitive de $\succ_\eta$. Pour tout $k \in \mathcal{K}$, t est dit être une *forme normale de Krivine* si pour tout $k' \in \mathcal{K}$, on n'a pas $k \succ_\eta k'$.

Définition 8.1.7. *Pour tout $k_0 \in \mathcal{K}$, on définit $l_h(k_0) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ainsi : s'il existe $k_1, \ldots, k_n \in \mathcal{K}$ tels que $k_i \succ_\eta k_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et k_n est une forme normale de Krivine, alors on pose $l_h(k_0) = n$, sinon on pose $l_h(k_0) = \infty$.*

Proposition 8.1.8. *Pour tout $s \in \mathbb{S}$, pour tout $k' \in \mathcal{K}$, si $s {\succ_\eta}^* k'$ et k' est une forme normale de Krivine, alors k' est un lambda-terme en forme normale de tête.*

Démonstration. Par induction sur $l_h(s)$.

Si $l_h(s) = 0$, c'est vrai, car on n'a jamais $l_h(s) = 0$.

Sinon, il y a cinq cas.

- Si $s = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathrm{dom}(e)$, alors $s \succ_\eta (x)\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$: $(x)\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$ est une forme normale de Krivine et $(x)\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$ est bien un lambda-terme en forme normale de tête.
- Si $s = ((\lambda x.u, e), \pi)$ et π est la pile vide, alors $k' = \lambda x.k''$ avec $((u, e), \epsilon){\succ_\eta}^* k''$: par hypothèse d'induction, k'' est un lambda-terme en forme normale de tête, donc k' aussi est un lambda-terme en forme normale de tête.
- Si $s = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \in \mathrm{dom}(e)$, alors $s \succ_\eta (e(x), \pi)$: $(e(x), \pi){\succ_\eta}^* k'$ donc, par hypothèse d'induction, k' est un lambda-terme en forme normale de tête.
- Si $s = ((\lambda x.u, e), c.\pi)$, alors $s \succ_\eta ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi)$: $((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi) \succ_\eta k'$ donc, par hypothèse d'induction, k' est un lambda-terme en forme normale de tête.
- Si $s = (((v)u, e), \pi)$, alors $s \succ_\eta ((v, e), (u, e).\pi)$: $((v, e), (u, e).\pi){\succ_\eta}^* k'$ donc, par hypothèse d'induction, k' est un lambda-terme en forme normale de tête.

□

Exemple 8.1.9. *On pose $s = (((\lambda x.(x)x)\lambda y.y, \emptyset), \epsilon)$. On a $l_h(s) = 9$:*

$$\begin{aligned}
s &\succ_\eta ((\lambda x.(x)x, \emptyset),\ (\lambda y.y, \emptyset)) \\
&\succ_\eta (((x)x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\}),\ \epsilon) \\
&\succ_\eta ((x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\}),\ (x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\})) \\
&\succ_\eta ((\lambda y.y, \emptyset),\ (x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\})) \\
&\succ_\eta ((y, \{(y, (x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\}))\}),\ \epsilon) \\
&\succ_\eta ((x, \{(x, (\lambda y.y, \emptyset))\}),\ \epsilon) \\
&\succ_\eta ((\lambda y.y, \emptyset),\ \epsilon) \\
&\succ_\eta \lambda y.((y, \emptyset),\ \epsilon) \\
&\succ_\eta \lambda y.y
\end{aligned}$$

Lemme 8.1.10. *Pour tous $k, k' \in \mathcal{K}$, si $k \succ_\eta k'$, alors $\overline{k} \rightarrow_h \overline{k'}$, où $\rightarrow_h$ est la clôture réflexive de la réduction de tête.*

Démonstration. Il y a deux cas.

- Si $k \in \mathbb{S}$, il y a cinq cas.
  - Si $k = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathrm{dom}(e)$, alors $\overline{k} = (x)\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$ et $\overline{k'} = \overline{(x)c_1 \ldots c_q} = (x)\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$: on a $\overline{k} = \overline{k'}$.
  - Si $k = ((\lambda x.u, e), \pi)$ et π est la pile vide, alors $\overline{k} = (\lambda x.u)[e] = \lambda x.u[e]$ (car k respecte la convention sur les variables) et $\overline{k'} = \overline{\lambda x.((u, e), \epsilon)} = \lambda x.u[e]$: on a $\overline{k} = \overline{k'}$.
  - Si $k = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \in \mathrm{dom}(e)$, alors $\overline{k} = \overline{e(x)}\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$ et $\overline{k'} = \overline{(e(x), (c_1, \ldots, c_q))} = \overline{e(x)}\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$: on a $\overline{k} = \overline{k'}$.

  – Si $k = ((\lambda x.u, e), (c, c_1, \ldots, c_q))$, alors $\overline{k} = ((\lambda x.u)[e])\overline{c}\overline{c_1}\ldots\overline{c_q} = (\lambda x.u[e])\overline{c}\overline{c_1}\ldots\overline{c_q}$ (car k respecte la convention sur les variables) et $\overline{k'} = \overline{((u, \{(x, c)\} \cup e))}\overline{c_1}\ldots\overline{c_q}$: $\overline{k}$ se réduite en une étape de réduction de tête en $\overline{k'}$.
  – Si $k = (((v)u, e), (c_1 \ldots c_q))$, alors $\overline{k} = (((v)u)[e])\overline{c_1}\ldots\overline{c_q} = (v[e])u[e]\overline{c_1}\ldots\overline{c_q}$ et $\overline{k'} = \overline{((v, e), (u, e).(c_1, \ldots, c_q))} = (v[e])u[e]\overline{c_1}\ldots\overline{c_q}$: on a $\overline{k} = \overline{k'}$.
– Sinon, $k = \lambda y.k_0$; alors $\overline{k} = \lambda y.\overline{k_0}$ et $\overline{k'} = \overline{\lambda y.k_0} = \lambda y.\overline{k_0}$: on a $\overline{k} = \overline{k'}$.

□

Théorème 8.1.11. *Pour tout $k \in \mathcal{K}$, si $l_h(k)$ est fini, alors $\overline{k}$ est normalisable de tête.*

Démonstration. Par induction sur $l_h(k)$.

Si $l_h(k) = 0$, alors $k \in \mathcal{H}$ donc k s'écrit $(x)t_1 \ldots t_p$ et donc $\overline{k}$ s'écrit $(x)\overline{t_1}\ldots\overline{t_p}$: c'est une forme normale de tête. Sinon, appliquer le Lemme 8.1.10. □

Pour tout terme normalisable de tête t, $h(t)$ est une notation pour le nombre de réductions de tête de t.

Théorème 8.1.12. *Pour tout état $s = ((t, e), \pi)$, si $\overline{s}$ est normalisable de tête, alors $l_h(s)$ est fini.*

Démonstration. Par induction bien fondée sur $(h(\overline{s}), d(e), t)$.

Si $h(\overline{s}) = 0$, $d(e) = 0$ et $t \in \mathcal{V}$, alors on a $l_h(s) = 1$.

Sinon, il y a cinq cas.

– Dans le cas où $t \in \mathcal{V} \cap \mathrm{dom}(e)$, on a $s \succ_\eta (e(t), \pi)$. On pose $s' = (e(t), \pi)$ et $e(t) = (t', e')$. On a $\overline{s} = \overline{s'}$ et $d(e') < d(e)$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_h(s')$ est fini et donc $l_h(s) = l_h(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t \in \mathcal{V}$ et $t \notin \mathrm{dom}(e)$, on a $l_h(s) = 1$.
– Dans le cas où $t = (v)u$, on a $s \succ_\eta ((v, e), (u, e).\pi)$. On pose $s' = ((v, e), (u, e).\pi)$. On a $\overline{s'} = \overline{s}$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_h(s')$ est fini et donc $l_h(s) = l_h(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t = \lambda x.u$ et $\pi = \epsilon$, on a $s \succ_\eta \lambda x.((u, e), \epsilon)$. On pose $s' = ((u, e), \epsilon)$. Comme s respecte la convention sur les variables, on a $\overline{s} = \lambda x.u[e] = \lambda x.\overline{s'}$. On a $h(\overline{s'}) = h(\overline{s})$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_h(s')$ est fini et donc $l_h(s) = l_h(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t = \lambda x.u$ et $\pi = c.\pi'$, on a $s \succ_\eta ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi)$. On pose $s' = ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi)$. On a $h(\overline{s'}) < h(\overline{s})$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_h(s')$ est fini et donc $l_h(s) = l_h(s') + 1$ aussi.

□

La Proposition 8.1.8, le Lemme 8.1.10 et le Théorème 8.1.12 montrent que pour tout $t \in \Lambda$ normalisable de tête de forme normale de tête principale t', on a $((t, \emptyset), \epsilon) {\succ_\eta}^* t'$ et t' est une forme normale de Krivine.

8.1.3 Des dérivations de type pour les états

On étend maintenant les dérivations de type pour les termes à des dérivations de type pour les clôtures et pour les états. On définira aussi la taille de telles dérivations, étant entendu que la taille d'une dérivation du Système R est tout simplement sa taille en tant qu'arbre, c'est-à-dire le nombre de ses nœuds.

Définition 8.1.13. *Pour tout clôture $c = (t, e)$, pour tout $(\Gamma, \alpha) \in \Phi \times D$ (respectivement $(\Gamma, a) \in \Phi \times \mathcal{M}_f(D)$), on définit, par induction sur $d(e)$, ce qu'est une dérivation Π de $\Gamma \vdash c : \alpha$ (respectivement $\Gamma \vdash c : a$) et ce qu'est $|\Pi|$ pour une telle dérivation :*

– – *si* $e = \emptyset$*, alors une dérivation de* $\Gamma \vdash c : \alpha$ *est un couple* $\Pi = (\Pi_0, \emptyset)$*, où* Π_0 *est une dérivation de* $\Gamma \vdash_R t : \alpha$ *;*
  – *si* $e = \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\}$ *avec* $n \neq 0$*, alors une dérivation de* $\Gamma \vdash c : \alpha$ *est un couple* $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi_1), \ldots, (x_n, \Pi_n)\})$*, où*
    – Π_0 *est une dérivation de* $\Gamma_0,\ x_1 : a_1, \ldots,\ x_n : a_n \vdash_R t : \alpha$ *;*
    – *pour tout* $j \in \{1, \ldots, n\}$*,* Π_j *est une dérivation de* $\Gamma_j \vdash c_j : a_j$ *;*
    – *et* $\Gamma = \sum_{j=0}^{n} \Gamma_j$*.*

  Si $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi_1), \ldots, (x_n, \Pi_n)\})$ *est une dérivation de* $\Gamma \vdash c : \alpha$*, alors on pose* $|\Pi| = \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i|$.
– *Pour tout entier p, une dérivation de* $\Gamma \vdash c : [\alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ *est un p-uplet* $(\Pi^1, \ldots, \Pi^p)$ *tel qu'il existe* $(\Gamma^1, \ldots,\ \Gamma^p) \in \Phi^p$ *et*
  – *pour* $1 \leq i \leq p$*,* Π^i *est une dérivation de* $\Gamma^i \vdash c : \alpha_i$ *;*
  – *et* $\Gamma = \sum_{i=1}^{p} \Gamma^i$ *;*

  Si $\Pi = (\Pi^1, \ldots, \Pi^p)$ *est une dérivation de* $\Gamma \vdash c : a$*, alors on pose* $|\Pi| = \sum_{i=1}^{p} |\Pi^i|$.

Lemme 8.1.14. *Soient* $((v)u, e) \in C$*. Pour tous* $b \in \mathcal{M}_f(D)$*,* $\Gamma', \Gamma'' \in \Phi$*, si* Π' *est une dérivation de* $\Gamma' \vdash (v, e) : (b, \alpha)$ *et* Π'' *est une dérivation de* $\Gamma'' \vdash (u, e) : b$*, alors il existe une dérivation* Π *de* $\Gamma' + \Gamma'' \vdash ((v)u, e) : \alpha$ *telle que* $|\Pi| = |\Pi'| + |\Pi''| + 1$*.*

Démonstration. On pose $e = \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\}$. $\Pi' = (\Pi'_0, \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (x_n, \Pi'_n)\})$, où
  – Π'_0 est une dérivation de $\Gamma'_0, x_1 : a'_1, \ldots, x_n : a'_n \vdash_R v : (b, \alpha)$,
  – pour $1 \leq i \leq n$, Π'_i est une dérivation de $\Gamma'_i \vdash c_i : a'_i$
  – et $\Gamma' = \sum_{i=0}^{n} \Gamma'_i$.

On pose $b = [\beta_1, \ldots, \beta_p]$ et $\Pi'' = (\Pi''^1, \ldots, \Pi''^p)$ où, pour $1 \leq j \leq p$, $\Pi''^j = (\Pi''^j_0, \{(x_1, \Pi''^j_1), \ldots, (x_n, \Pi''^j_n)\})$ est une dérivation de $\Gamma''^j \vdash (u, e) : \beta_j$ avec $\Gamma'' = \sum_{j=1}^{p} \Gamma''^j$. Pour $j \in \{1, \ldots, p\}$,
  – Π''^j_0 est une dérivation de $\Gamma''^j_0, x_1 : a''^j_1, \ldots, x_n : a''^j_n \vdash_R u : \beta_j$,
  – pour $1 \leq i \leq n$, Π''^j_i est une dérivation de $\Gamma''^j_i \vdash c_i : a''^j_i$
  – et $\Gamma''^j = \sum_{i=0}^{n} \Gamma''^j_i$.

Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $\Gamma_i = \Gamma'_i + \sum_{j=1}^{p} \Gamma''^j_i$ et $a_i = a'_i + \sum_{j=1}^{p} a''^j_i$. Il existe une dérivation Π_0 de $\Gamma_0, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \vdash_R (v)u : \alpha$ avec $|\Pi_0| = |\Pi'_0| + \sum_{j=1}^{p} |\Pi''^j_0| + 1$. De plus, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\Pi_i = \Pi'_i * \Pi''^1_i * \ldots * \Pi''^p_i$, où $*$ est la concaténation de suites finies, est une dérivation de $\Gamma_i \vdash c_i : a_i$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i &= \sum_{i=0}^{n} (\Gamma'_i + \sum_{j=1}^{p} \Gamma''^j_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \Gamma'_i + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{p} \Gamma''^j_i \\ &= \Gamma' + \Gamma'' \ .\end{aligned}$$

Donc $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi_1), \ldots, (x_n, \Pi_n)\})$ est une dérivation de $\Gamma' + \Gamma'' \vdash ((v)u, e) : \alpha$. On a

$$\begin{aligned}|\Pi| &= \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| \\ &= |\Pi'_0| + \sum_{j=1}^{p} |\Pi''^j_0| + 1 + \sum_{i=1}^{n} |\Pi_i|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |\Pi'_0| + \sum_{j=1}^{p} |\Pi''^j_0| + 1 + \sum_{i=1}^{n} (|\Pi'_i| + \sum_{j=1}^{p} |\Pi''^j_i|) \\ &= |\Pi'| + \sum_{j=1}^{p} |\Pi''^j| + 1 \\ &= |\Pi'| + |\Pi''| + 1 \ . \end{aligned}$$

□

Lemme 8.1.15. *Pour tout* $(u, e) \in C$*, pour toute dérivation* Π' *de* $\Gamma, x : b \vdash (u, e) : \beta$*, il existe une dérivation* Π *de* $\Gamma \vdash (\lambda x.u, e) : (b, \beta)$ *telle que* $|\Pi| = |\Pi'| + 1$.

Démonstration. On pose $e = \{(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n)\}$ et $\Pi' = (\Pi'_0, \{(x_1, \Pi'_1), \dots, (x_n, \Pi'_n)\})$. On sait que Π'_0 est une dérivation de $\Gamma, x : b, x_1 : a_1, \dots, x_n : a_n \vdash_R u : \beta$ donc il existe une dérivation Π_0 de $\Gamma, x_1 : a_1, \dots, x_n : a_n \vdash_R \lambda x.u : (b, \beta)$. On pose $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi'_1), \dots, (x_n, \Pi'_n)\})$: c'est une dérivation de $\Gamma \vdash (\lambda x.u, e) : (b, \beta)$ et on a

$$\begin{aligned} |\Pi| &= |\Pi_0| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| \\ &= |\Pi'_0| + 1 + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| \\ &= |\Pi'| + 1 \ . \end{aligned}$$

□

Définition 8.1.16. *Soit* $s = (c, (c_1, \dots, c_q))$ *un état. On dit que* $(\Pi_0, (\Pi_1, \dots, \Pi_q))$ *est une dérivation de* $\Gamma \vdash s : \alpha$ *s'il existe* $b_1, \dots, b_q \in \mathcal{M}_f(D)$, $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q \in \Phi$ *tels que*

- Π_0 *est une dérivation de* $\Gamma_0 \vdash c : b_1 \dots b_q \alpha$ *;*
- *pour tout* $k \in \{1, \dots, q\}$, Π_k *est une dérivation de* $\Gamma_k \vdash c_k : b_k$ *;*
- *et* $\Gamma = \sum_{k=0}^{q} \Gamma_k$.

Dans ce cas, on pose $|(\Pi_0, (\Pi_1, \dots, \Pi_q))| = \sum_{k=0}^{q} |\Pi_k|$.

Lemme 8.1.17. *Soient* $n, i_0 \in \mathbb{N}$ *tels que* $1 \leq i_0 \leq n$*. Soient* $s = (c'_{i_0}, (c_1, \dots, c_q)) \in \mathbb{S}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{V}$, $c'_1, \dots, c'_n \in C$*. Pour tout* $(\Gamma, \alpha) \in \Phi \times D$*, si* Π' *est une dérivation de* $\Gamma \vdash s : \alpha$*, alors il existe une dérivation* Π *de* $\Gamma \vdash ((x_{i_0}, \{(x_1, c'_1), \dots, (x_n, c'_n)\}), (c_1, \dots, c_q)) : \alpha$ *telle que* $|\Pi| = |\Pi'| + 1$.

Démonstration. On pose $\Pi' = (\Pi'', (\Pi_1, \dots, \Pi_q))$. Π'' est une dérivation de $\Gamma'' \vdash c'_{i_0} : b_1 \dots b_q \alpha$. On note Π_0 la dérivation de $x : [b_1 \dots b_q \alpha] \vdash_R x : b_1 \dots b_q \alpha$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$\Pi''_i = \begin{cases} (\Pi'') & \text{si } i = i_0 \,; \\ \epsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

$((\Pi_0, \{(x_1, \Pi''_1), \dots, (x_n, \Pi''_n)\}, (\Pi_1, \dots, \Pi_q))$ est une dérivation de

$$\Gamma \vdash ((x_{i_0}, \{(x_1, c'_1), \dots, (x_n, c'_n)\}), (c_1, \dots, c_q)) : \alpha$$

et on a

$$|((\Pi_0, \{(x_1, \Pi''_1), \dots, (x_n, \Pi''_n)\}, (\Pi_1, \dots, \Pi_q))| = \sum_{i=1}^{n} |\Pi''_1| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + |\Pi_0|$$

$$\begin{aligned} &= |\Pi''| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\ &= |(\Pi'', (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))| + 1 \\ &= |\Pi'| + 1 \ . \end{aligned}$$

□

Lemme 8.1.18. *Pour tout* $s = ((u, \{(x, c)\} \cup e), (c_1, \ldots, c_q)) \in \mathbb{S}$*, pour toute dérivation* Π' *de* $\Gamma \vdash s : \alpha$*, il existe une dérivation* Π *de* $\Gamma \vdash ((\lambda x.u, e), (c, c_1, \ldots, c_q))$ *telle que* $|\Pi| = |\Pi'| + 1$.

Démonstration. On pose $e = \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n)\}$ et

$$\Pi' = ((\Pi'_0, \{(x, \Pi''), (x_1, \Pi''_1), \ldots, (x_n \Pi''_n)\}), (\Pi'_1, \ldots, \Pi'_q)) \ .$$

On sait que Π'_0 est une dérivation de $\Gamma, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n, x : a \vdash_R u : b_1 \ldots b_q \alpha$ donc il existe une dérivation Π_0 de $x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \vdash_R \lambda x.u : a b_1 \ldots b_q \alpha$ telle que $|\Pi_0| = |\Pi'_0| + 1$. On pose $\Pi = ((\Pi_0, \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (c_n, \Pi'_n)\}), (\Pi'', \Pi'_1, \ldots, \Pi'_q))$: c'est une dérivation de $\Gamma \vdash ((\lambda x.u, e), (c, c_1, \ldots, c_q)) : \alpha$ et on a

$$\begin{aligned} |\Pi| &= |\Pi_0| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| + |\Pi''| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi'_k| \\ &= |\Pi'_0| + 1 + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| + |\Pi''| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi'_k| \\ &= |\Pi'| + 1 \ . \end{aligned}$$

□

8.1.4 Relier la taille des dérivations et le temps d'exécution

Le but de cette sous-section est de démontrer le Théorème 8.1.22.

Lemme 8.1.19. *Soient* $((v)u, e) \in C$ *et* $(\Gamma, \alpha) \in \Phi \times D$*. Pour toute dérivation* Π *de* $\Gamma \vdash ((v)u, e) : \alpha$*, il existe* $b \in \mathcal{M}_f(D)$, $\Gamma', \Gamma'' \in \Phi$*, une dérivation* Π' *de* $\Gamma' \vdash (v, e) : (b, \alpha)$ *et une dérivation* Π'' *de* $\Gamma'' \vdash (u, e) : b$ *tels que* $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ *et* $|\Pi| = |\Pi'| + |\Pi''| + 1$.

Démonstration. On pose $e = \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\}$. $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi_1), \ldots, (x_n, \Pi_n)\})$ où

(i) Π_0 est une dérivation de $\Gamma_0, x_1 : a_1, x_n : a_n \vdash_R (v)u : \alpha$,

(ii) pour $1 \leq i \leq n$, Π_i est une dérivation de $\Gamma_i \vdash c_i : a_i$,

(iii) $\Gamma = \sum_{i=0}^{n} \Gamma_i$.

Par (i), il existe $p \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \ldots, \beta_p \in D$, une dérivation Π_0^0 de $\Gamma_0^0, x_1 : a'_1, \ldots, x_n : a'_n \vdash_R v : ([\beta_1, \ldots, \beta_p], \alpha)$ et, pour $1 \leq j \leq p$, une dérivation Π_0^j de $\Gamma_0^j, x_1 : a_1''^j, \ldots, x_n : a_n''^j \vdash_R u : \beta_j$ tels que

- $\Gamma_0 = \sum_{j=0}^{p} \Gamma_0^j$,
- pour $1 \leq i \leq n$, $a_i = a'_i + \sum_{j=1}^{p} a_i''^j$
- et $|\Pi_0| = \sum_{j=0}^{p} |\Pi_0^j| + 1$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $a''_i = \sum_{j=1}^{p} a''^{j}_i$. Par (ii), pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe Γ'_i, Γ''_i, une dérivation Π'_i de $\Gamma'_i \vdash c_i : a'_i$ et une dérivation Π''_i de $\Gamma''_i \vdash c_i : a''_i$ tels que

- $\Gamma_i = \Gamma'_i + \Gamma''_i$
- et $|\Pi_i| = |\Pi'_i| + |\Pi''_i|$.

On pose $b = [\beta_1, \dots, \beta_p]$, $\Gamma' = \Gamma^0_0 + \sum_{i=1}^{n} \Gamma'_i$, $\Gamma'' = \sum_{j=1}^{p} \Gamma^j_0 + \sum_{i=1}^{n} \Gamma''_i$, $\Pi' = (\Pi^0_0, \{(x_1, \Pi'_1), \dots, (x_n, \Pi'_n)\})$ et $\Pi'' = ((\Pi^1_0, \dots, \Pi^p_0), \{(x_1, \Pi''_1), \dots, (x_n, \Pi''_n)\})$. On a

$$\begin{array}{rcl} \Gamma & = & \sum_{i=0}^{n} \Gamma_i \\ & & \text{(par (iii))} \\ & = & \sum_{j=0}^{p} \Gamma^j_0 + \sum_{i=1}^{n} (\Gamma'_i + \Gamma''_i) \\ & = & \Gamma' + \Gamma'' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} |\Pi| & = & \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| \\ & = & \sum_{j=0}^{p} |\Pi^j_0| + 1 + \sum_{i=1}^{n} (|\Pi'_i| + |\Pi''_i|) \\ & = & |\Pi'| + |\Pi''| + 1 \ . \end{array}$$

□

Proposition 8.1.20. *Pour tout $s \in \mathbb{S}$ tel que $\overline{s}$ est normalisable de tête, pour tout (Γ, α), pour toute dérivation Π de $\Gamma \vdash s : \alpha$, on a $l_h(s) \leq |\Pi|$.*

Démonstration. Par le Théorème 8.1.12, on peut prouver la proposition par induction sur $l_h(s)$. Si $l_h(s) = 0$, c'est vrai, car on n'a jamais $l_h(s) = 0$. Sinon, il y a cinq cas.

- Dans le cas où $s = ((x, e), \pi)$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathrm{dom}(e)$, $l_h(s) = 1 \leq |\Pi|$.
- Dans le cas où $s = ((x_{i_0}, \{(x_1, c'_1), \dots, (x_n, c'_n)\}), (c_1, \dots, c_q))$, $\Pi = (\Pi_0, (\Pi_1, \dots, \Pi_q))$, où $\Pi_0 = (\Pi'_0, \{(x_1, \Pi'_1), \dots, (x_n, \Pi'_n)\})$, avec
  - Π'_0 est une dérivation de $\Gamma'_0, x_1 : a_1, \dots, x_n : a_n \vdash_R x_i : b_1 \dots b_q \alpha$,
  - pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, Π'_i est une dérivation $\Gamma'_i \vdash c'_i : a_i$,
  - $\Gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \Gamma'_i$,
  - pour $1 \leq k \leq q$, Π_k est une dérivation de $\Gamma_k \vdash c_k : b_k$
  - et $\Gamma = \sum_{k=0}^{q} \Gamma_k$.

  Donc $a'_{i_0} = [b_1 \dots b_q \alpha]$ et donc $\Pi'_{i_0} = (\Pi'')$ avec Π'' une dérivation de $\Gamma'_{i_0} \vdash c'_{i_0} : b_1 \dots b_q \alpha$. $(\Pi'', (\Pi_1, \dots, \Pi_q))$ est une dérivation de $\Gamma'_i + \sum_{k=1}^{q} \Gamma_k \vdash (c'_i, (c_1, \dots, c_q)) : \alpha$. On a

$$\begin{array}{rcl} l_h(s) & = & l_h(c'_{i_0}, (c_1, \dots, c_q)) + 1 \\ & \leq & |(\Pi'', (\Pi_1, \dots, \Pi_q))| + 1 \\ & & \text{(par hypothèse d'induction)} \\ & = & |\Pi''| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= |\Pi'_{i_0}| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\
&\leq |\Pi_0| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |((\Pi_0, (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))| \\
&= |\Pi| \ .
\end{aligned}$$

– Dans le cas où $s = ((\lambda x.u, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n)\}), (c', c_1, \ldots, c_q))$, on a $\Pi = ((\Pi'_0, \Pi''_0), (\Pi', \Pi_1, \ldots, \Pi_q))$ avec
  – Π'_0 est une dérivation de $\Gamma'_0, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \vdash_R \lambda x.u : b' b_1 \ldots b_q \alpha$,
  – $\Pi''_0 = \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (x_n, \Pi'_n)\}$ où, pour $1 \leq i \leq n$, Π'_i est une dérivation de $\Gamma'_i \vdash c'_i : a_i$,
  – $\Gamma_0 = \sum_{i=0}^{n} \Gamma'_i$,
  – Π' est une dérivation de $\Gamma' \vdash b' : c'$,
  – pour $1 \leq k \leq q$, Π_k est une dérivation de $\Gamma_k \vdash b_k : c_k$.

  Il existe donc une preuve Π'' de

$$\Gamma'_0, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n, x : b' \vdash_R u : b_1 \ldots b_q \alpha$$

  avec $|\Pi'_0| = |\Pi''| + 1$. $(\Pi'', \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (x_n, \Pi'_n), \Pi'\})$ est une dérivation de

$$\Gamma_0 + \Gamma' \vdash (u, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n), (x, c)\}) : b_1 \ldots b_q \alpha \ .$$

  Donc $((\Pi'', \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (x_n, \Pi'_n), (x, \Pi')\}), (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))$ est une dérivation de

$$\Gamma \vdash ((u, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n), (x, c)\}), (c_1, \ldots, c_q)) : \alpha \ .$$

  On a

$$\begin{aligned}
l_h(s) &= l_h((u, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n), (x, c)\}), (c_1, \ldots, c_q)) + 1 \\
&\leq |((\Pi'', \{\Pi'_1, \ldots, \Pi'_n, \Pi'\}), (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))| + 1 \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= |(\Pi'', \{\Pi'_1, \ldots, \Pi'_n, \Pi'\})| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\
&= |\Pi''| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| + |\Pi'| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\
&= |\Pi'_0| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| + |\Pi'| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |\Pi'_0| + |\Pi''_0| + |\Pi'| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |(\Pi'_0, \Pi''_0)| + |\Pi'| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |((\Pi'_0, \Pi''_0), (\Pi', \Pi_1, \ldots, \Pi_q))| \\
&= |\Pi| \ .
\end{aligned}$$

– Dans le cas où $s = (((v)u, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $\Pi = (\Pi_0, (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))$ avec
  – Π_0 est une dérivation de $\Gamma_0 \vdash ((v)u, e) : b_1 \ldots b_q\alpha$,
  – pour $1 \leq k \leq q$, Π_k est une dérivation de $\Gamma_k \vdash c_k : b_k$
  – et $\Gamma = \sum_{k=0}^{q} \Gamma_k$.

  Par le Lemme 8.1.19, il existe $b \in \mathcal{M}_f(D)$, $\Gamma'_0, \Gamma''_0 \in \Phi$, une dérivation Π'_0 de $\Gamma'_0 \vdash (u, e) : bb_1 \ldots b_q\alpha$ et une dérivation Π''_0 de $\Gamma''_0 \vdash (u, e) : b$ tels que $\Gamma_0 = \Gamma'_0 + \Gamma''_0$ et $|\Pi_0| = |\Pi'_0| + |\Pi''_0| + 1$. $(\Pi'_0, (\Pi''_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_q))$ est une dérivation de $\Gamma \vdash ((v, e), ((u, e), c_1, \ldots, c_q)) : \alpha$. On a

$$\begin{array}{rcl} l_h(s) & = & l_h((v, e), ((u, e), c_1, \ldots, c_q)) + 1 \\ & \leq & |(\Pi'_0, (\Pi''_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_q))| + 1 \\ & & \text{(par hypothèse d'induction)} \\ & = & |\Pi'_0| + |\Pi''_0| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\ & = & |\Pi_0| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\ & = & |(\Pi_0, (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))| \\ & = & |\Pi| \ . \end{array}$$

– Dans le cas où $s = ((\lambda x.u, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n)\}), \epsilon)$, $\Pi = ((\Pi'_0, \Pi''_0), \epsilon)$ avec
  – Π'_0 est une dérivation de $\Gamma'_0, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n \vdash_R \lambda x.u : \alpha$,
  – $\Pi''_0 = \{(x_1, \Pi'_1), \ldots, (x_n, \Pi'_n)\}$ où, pour $1 \leq i \leq n$, Π'_i est une dérivation de $\Gamma'_i \vdash c'_i : a_i$,
  – $\Gamma = \sum_{i=0}^{n} \Gamma'_i$.

  Donc il existe une dérivation Π'' de $\Gamma'_0, x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n, x : b \vdash_R u : \beta$ telle que $\alpha = (b, \beta)$ et $|\Pi'_0| = |\Pi''| + 1$. $((\Pi'', \Pi''_0), \epsilon)$ est une dérivation de $\Gamma, x : b \vdash ((u, \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\}), \epsilon) : \beta$. On a

$$\begin{array}{rcl} l_h(s) & = & l_h((u, \{(x_1, c_1), \ldots, (x_n, c_n)\}), \epsilon) + 1 \\ & \leq & |((\Pi'', \Pi''_0), \epsilon)| + 1 \\ & = & |\Pi''| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| + 1 \\ & = & |\Pi'_0| + \sum_{i=1}^{n} |\Pi'_i| \\ & = & |(\Pi'_0, \Pi''_0)| \\ & = & |\Pi| \ . \end{array}$$

□

Proposition 8.1.21. *Pour tout $s \in \mathbb{S}$ tel que $\overline{s}$ est normalisable de tête, il existe (Γ, α) et une dérivation Π de $\Gamma \vdash s : \alpha$ tels que l'on ait $l_h(s) = |\Pi|$.*

Démonstration. Par le Théorème 8.1.12, on peut prouver la proposition par induction sur $l_h(s)$. Si $l_h(s) = 0$, alors c'est vrai, car on n'a jamais $l_h(s) = 0$. Sinon, il y a cinq cas :

– Dans le cas où $s = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathsf{dom}(e)$, on a $l_h(s) = 1$ et il existe une dérivation $\Pi = (\Pi_0, (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))$ de $x : [\underbrace{[] \ldots []}_{q \text{ fois}} \alpha] \vdash (x, e) : \underbrace{[] \ldots []}_{q \text{ fois}} \alpha$ avec $|\Pi_0| = 1$ et $|\Pi_1| = \ldots = |\Pi_q| = 0$.

– Dans le cas où $s = ((x_{i_0}, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n)\}), (c_1, \ldots, c_q))$, appliquer le Lemme 8.1.17.
– Dans le cas où le sous-terme courant est une application, appliquer le Lemme 8.1.14.
– Dans le cas où le sous-terme courant est une abstraction et la pile est vide, appliquer le Lemme 8.1.15.
– Dans le cas où le sous-terme courant est une abstraction et la pile n'est pas vide, appliquer le Lemme 8.1.18.

□

Théorème 8.1.22. *Pour $t \in \Lambda$, on a*

$$l_h((t, \emptyset), \epsilon) = Inf\,\{|\Pi|\ ;\ \exists(\Gamma, \alpha)\ \Pi \text{ est une dérivation de } \Gamma \vdash_R t : \alpha\}\ .$$

Démonstration. On distingue deux cas :
– t n'est pas normalisable de tête : appliquer les Théorèmes 6.3.28 et 8.1.11 ;
– t est normalisable de tête : appliquer les Propositions 8.1.20 et 8.1.21.

□

8.1.5 Relier la sémantique et le temps d'exécution

Maintenant, on définit la taille $|\delta|$ d'un type ou d'un multiensemble fini δ de types.

Définition 8.1.23. *Pour tout $\delta \in D \cup \mathcal{M}_f(D)$, on definit, par induction sur δ, $|\delta|$ et $\overline{s}(\delta)$:*
– *si $\delta \in A$, alors $|\delta| = 1$ et $\overline{s}(\delta) = 0$;*
– *si $\delta = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, alors $|\delta| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ et $\overline{s}(\delta) = \sum_{i=1}^n \overline{s}(\alpha_i)$;*
– *si $\delta = (a, \alpha)$, alors $|\delta| = \overline{s}(a) + |\alpha| + 1$ et $\overline{s}(\delta) = |a| + \overline{s}(\alpha) + 1$.*

Lemme 8.1.24. *Pour tout lambda-terme u, s'il existe une dérivation Π de $x_1 : a_1, \ldots, x_m : a_m \vdash_R u : \alpha$, alors $|a_1 \ldots a_m\alpha| = \overline{s}(a_1 \ldots a_m\alpha)$.*

Démonstration. Par induction sur Π. □

Les Propositions 8.1.27 et 8.1.28 donnent une justification de cette définition de la taille d'un type. La relation d'équivalence $\sim$ a été définie dans la Définition 6.3.8.

Lemme 8.1.25. *Soit v un lambda-terme normal et soit Π une dérivation de $x_1 : a_1, \ldots, x_m : a_m \vdash_R v : \alpha$. Alors on a $|\Pi| \leq |a_1 \ldots a_m\alpha|$.*

Démonstration. Par induction sur v. □

Lemme 8.1.26. *Soit v un lambda-terme normal et soit Π une dérivation de $x_1 : a_1, \ldots, x_m : a_m \vdash_R v : \alpha$. Il existe $a'_1, \ldots, a'_m, \alpha'$ et une dérivation Π' de $x_1 : a'_1, \ldots, x_m : a'_m \vdash_R v : \alpha'$ telle que $\Pi' \sim \Pi$ et $|\Pi'| + m = |a'_1 \ldots a'_m\alpha'|$. Si, de plus, A est infini, alors on peut choisir Π' de telle manière qu'il existe une substitution s telle que $s(a'_1) = a_1, \ldots, s(a'_m) = a_m$ et $s(\alpha') = \alpha$.*

Démonstration. Par induction sur v. □

Dans le cas où A est infini, la dérivation Π' du lemme est ce que [17] appelle une *ground deduction for v*.

Proposition 8.1.27. *Soit t un lambda-terme normal clos, soit $\alpha \in D$ et soit Π une dérivation de $\vdash_R t : \alpha$. Alors on a*

$$|\Pi| = Min\{|\alpha'|\ ;\ \text{il existe une dérivation } \Pi' \text{ de } \vdash_R t : \alpha' \text{ telle que } \Pi' \sim \Pi\}\ .$$

Si, de plus, A est infini, alors on a

$$|\Pi| = Min\{|\alpha'|\ ;\ \text{il existe une dérivation } \Pi' \text{ de } \vdash_R t : \alpha' \text{ telle que } (\Pi' \sim \Pi \text{ et } s(\alpha') = \alpha)\}\ .$$

Démonstration. Appliquer les Lemmes 8.1.25 et 8.1.26. □

Proposition 8.1.28. *Supposons A infini. Soit t un lambda-terme normal clos et soit $\alpha \in [\![t]\!]$. On a*

$$\begin{aligned} & Min\{|\Pi|\ ;\ \Pi \text{ est une dérivation de } \vdash t : \alpha\} \\ = \quad & Min\{|\alpha'|\ ;\ \text{il existe une dérivation } \Pi' \text{ de } \vdash_R t : \alpha' \text{ et une substitution } s \text{ telles que } s(\alpha') = \alpha\}\ . \end{aligned}$$

Démonstration. Appliquer le Lemme 8.1.26. □

Théorème 8.1.29. *Soient v et u deux termes normaux clos. Supposons $(a, \alpha) \in [\![v]\!]$ et $Supp(a) \subseteq [\![u]\!]$. On a $l_h(((v)u, \emptyset), \epsilon) \leq 2|a| + |\alpha| + 2$.*

Démonstration. Posons $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Il existe une dérivation Π_0 de $\vdash_R v : (a, \alpha)$ et n dérivations $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ de $\vdash_R u : \alpha_1, \ldots, \vdash_R u : \alpha_n$ respectivement. Donc il existe une dérivation Π de $\vdash_R (v)u : \alpha$ telle que $|\Pi| = \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| + 1$. Par le Théorème 8.1.22, on a donc

$$\begin{aligned} l_h(((v)u, \emptyset), \epsilon) & \leq \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| + 1 \\ & \leq |(a, \alpha)| + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + 1 \\ & \quad \text{(par le Lemme 8.1.26)} \\ & = \sum_{i=1}^{n} \overline{s}(\alpha_i) + |\alpha| + 1 + |a| + 1 \\ & = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + |\alpha| + 1 + |a| + 1 \\ & \quad \text{(par le Lemme 8.1.24)} \\ & = 2|a| + |\alpha| + 2\ . \end{aligned}$$

□

Si A est infini, on a un résultat plus précis.

Théorème 8.1.30. *Supposons A infini. Soient v et u deux termes normaux clos. On a*

$$\begin{aligned} l_h(((v)u, \emptyset), \epsilon) = \quad Inf\{ \quad & |(a', \alpha')| + |a''| + 1\ ; \\ & (a, \alpha), (a', \alpha') \in [\![v]\!], Supp(a), Supp(a'') \subseteq [\![u]\!] \\ & \text{et } \exists s', s'' \in \mathcal{S}\ (s'(a', \alpha') = (a, \alpha) \text{ et } s''(a'') = a)\}\ , \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des substitutions.

Démonstration. Appliquer le Théorème 8.1.22 et la Proposition 8.1.28. □

Exemple 8.1.31. *On pose $v = \lambda x.(x)x$ et $u = \lambda y.y$. Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in A$. On pose*
- $\alpha = ([\gamma_0], \gamma_0)$;
- $a = [\alpha, ([\alpha], \alpha)]$;
- $\alpha' = \gamma_0$;
- $a' = [\alpha', ([\alpha'], \alpha')]$;
- *et* $a'' = [([\gamma_0], \gamma_0), ([\gamma_1], \gamma_1)]$.

Soit s' une substitution telle que $s'(\gamma_0) = ([\gamma_0], \gamma_0)$ et soit s'' une substitution telle que $s''(\gamma_0) = \gamma_0$ et $s''(\gamma_1) = \alpha$. On a
- $(a, \alpha), (a', \alpha') \in [\![v]\!]$;
- $Supp(a), supp(a'') \subseteq [\![u]\!]$;
- $s'(a', \alpha') = (a, \alpha)$ *et* $s''(a'') = a$;
- $|(a', \alpha')| = 4$ *et* $|a''| = 4$.

Par l'Exemple 8.1.9, on sait que l'on a $l_h(((v)u, \emptyset), \epsilon) = 9$. Et l'on a $|(a', \alpha')| + |a''| + 1 = 9$.

Remarquer que, comme l'illustre l'exemple suivant, la non-idempotence esr cruciale.

Exemple 8.1.32. *Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\overline{n} = \lambda f.\lambda x.\underbrace{(f)\ldots(f)}_{n\ fois}x$ et $I = \lambda y.y$. Soit $\gamma \in D$. On pose $\alpha = ([\gamma], \gamma)$ et $a = [\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n\ fois}]$. On a $(a, \alpha) \in [\![\overline{n}]\!]$ et $\alpha \in [\![I]\!]$. $l_h(((\overline{n})I, \emptyset), \epsilon) = 4(n+1) = 2n + 3 + 2n + 1 = |(a, \alpha)| + |a| + 1$. Mais dans le Système $\mathcal{D}$ (avec des types* idempotents*), tout entier de Church $\overline{n}$, pour $n \geq 1$, a comme type $((\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \gamma))$.*

8.2 Une machine calculant la forme β-normale

On modifie légèrement la machine de telle manière qu'elle calcule la forme β-normale d'un terme.

Définition 8.2.1. *Pour $k, k' \in \mathcal{K}$, où k respecte la convention sur les variables, on définit $k \succ_\beta k'$:*
- *si $k \in \mathbb{S}$, alors il y a trois cas :*
  - *si $k = ((x, e), (c_1, \ldots, c_q))$, $x \in \mathcal{V}$ et $x \notin \mathsf{dom}(e)$, alors $k' = (x)(c_1, \epsilon)\ldots(c_q, \epsilon)$;*
  - *si $k = ((\lambda x.u, e), \pi)$ et π est la pile vide, alors $k' = \lambda x.((u, e), \epsilon)$;*
  - *sinon $k \succ_{\mathbb{S}} k'$;*
- *si $k \in \mathcal{H}$, alors il y a deux cas :*
  - *si $k \in \mathcal{V}$, alors $k \succ_\beta k'$ est faux pour tout k' ;*
  - *si $k = (v)u$, alors ($k' = (v')u$ avec $v \succ_\beta v'$) ou ($k' = (v)u'$ avec $u \succ_\beta u'$ et $v \in \Lambda$) ;*
- *si $k = \lambda x.k_0$, alors $k' = \lambda x.k'_0$ avec $k_0 \succ_\beta k'_0$.*

Remarque 8.2.2. *Si $v \in \Lambda$, alors on n'a jamais $v \succ_\beta k'$ donc $\succ_\beta$, comme $\succ_\eta$, est une fonction partielle de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{K}$.*

Comparons la Définition 8.2.1 avec la Définition 8.1.6. La différence est dans le cas où le sous-terme courant d'un état est une variable et où cette variable n'a pas de valeur dans l'environnement : la première machine s'arrête, la seconde machine continue à calculer chaque argument de la variable.

La fonction l_β est définie comme l_h (voir la Définition 8.1.7), mais pour cette nouvelle machine.

Pour tout terme normalisable t, $s(t)$ est une notation pour le nombre de réductions gauches de t.

Théorème 8.2.3. *Pour tout état $s = ((t, e), \pi)$, si $\overline{s}$ est normalisable, alors $l_\beta(s)$ est fini.*

Démonstration. Par induction bien fondée sur $(s(\overline{s}), \overline{s}, d(e), t)$.

Si $s(\overline{s}) = 0$, $\overline{s} \in \mathcal{V}$, $d(e) = 0$ et $t \in \mathcal{V}$, alors on a $l_\beta(s) = 1$.

Sinon, il y a cinq cas.

– Dans le cas où $t \in \mathcal{V} \cap \mathrm{dom}(e)$, on a $s \succ_\beta (e(t), \pi)$. On pose $s' = (e(t), \pi)$ et $e(t) = (t', e')$. On a $\overline{s} = \overline{s'}$ et $d(e') < d(e)$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_\beta(s')$ est fini et donc $l_\beta(s) = l_\beta(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t \in \mathcal{V}$ et $t \notin \mathrm{dom}(e)$, on pose $\pi = (c_1, \dots, c_q)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, on a $s(\overline{c_k}) \leq s(\overline{s})$ et $\overline{c_k} < \overline{s}$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur c_k : pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $l_\beta(c_k)$ est fini donc $l_\beta(s) = \sum_{k=1}^{q} l_\beta(c_k) + 1$ est fini aussi.
– Dans le cas où $t = (v)u$, on a $s \succ_\beta ((v, e), (u, e).\pi)$. On pose $s' = ((v, e), (u, e).\pi)$. On a $\overline{s'} = \overline{s}$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_\beta(s')$ est fini et donc $l_\beta(s) = l_\beta(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t = \lambda x.u$ et $\pi = \epsilon$, on a $s \succ_\beta \lambda x.((u, e), \epsilon)$. On pose $s' = ((u, e), \epsilon)$. Comme s respecte la convention sur les variables, on a $\overline{s} = \lambda x.u[e] = \lambda x.\overline{s'}$. On a $s(\overline{s'}) = s(\overline{s})$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_\beta(s')$ est fini et donc $l_\beta(s) = l_\beta(s') + 1$ aussi.
– Dans le cas où $t = \lambda x.u$ et $\pi = c.\pi'$, on a $s \succ_\beta ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi)$. On pose $s' = ((u, \{(x, c)\} \cup e), \pi)$. On a $s(\overline{s'}) < s(\overline{s})$ donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction : $l_\beta(s')$ est fini et donc $l_\beta(s) = l_\beta(s') + 1$ aussi.

□

Pour tout lambda-terme t, nous voulons relier $l_\beta(t)$, la taille des dérivations de t et celle des types de t : nous savons déjà que la taille du type le plus petit, s'il existe, borne $l_h(t)$; pour $l_\beta(t)$, nous allons montrer que c'est la taille d'une dérivation du typage principal de (la forme normale de) t (s'il existe).

8.2.1 Typages principaux et 1-typages

Le travail de [17] peut être adapté afin de montrer que tous les termes normaux ont un typage principal dans le Système R, si A est infini. Un typage (Γ, α) pour un terme est un typqge principal si tous les autres typages du même terme peuvent être dérivés de (Γ, α) par un certain ensemble d'opérations. Ici, les opérations sont la substitution (voir la Définition 6.3.13) et l'expansion (très compliquée à définir). La différence avec [17] est que nous avons (et nous avons besoin de) la notion de 0-expansion ([17] a la notion de n-expansion seulement pour $n \geq 1$). Pour tous (Γ, α), $(\Gamma', \alpha') \in \Phi \times D$, on écrit $(\Gamma, \alpha) \to (\Gamma', \alpha')$ pour signifier qu'il existe un entier n tel que (Γ', α') est une n-expansion de (Γ, α). $\to^*$ sera une notation pour la clôture réflexive transitive de $\to$.

Définition 8.2.4. *Le typage principal des termes normaux :*

$$\frac{}{x : [\gamma] \vdash_P x : \gamma}\ \gamma \in A$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash_P t : \alpha}{\Gamma \vdash_P \lambda x.t : (a, \alpha)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash_P u_1 : \alpha_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash_P u_n : \alpha_n}{\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i + \{(x, [[\alpha_1] \dots [\alpha_n]\gamma])\} \vdash_P (x)u_1 \dots u_n : \gamma}\ (*)$$

$(*)$ *les Γ_i sont disjoints et $\gamma \in A$ n'apparaît pas dans les Γ_i*

Si $\Delta \vdash_P t : \beta$, alors on dit que (Δ, β) est un typage principal de t. Nous pourrions montrer que si (Δ, β) est un typage principal d'un terme normal t, alors on a $\Gamma \vdash_R t : \alpha$ si, et seulement s'ile existe (Γ', α') tel que $(\Delta, \beta) \to^* (\Gamma', \alpha')$ et (Γ, α) peut être obtenu à partir de (Γ', α') par une substitution

(exactement comme dans [17], sauf que nous considérons aussi les 0-expansions). Mais nous n'avons pas besoin de ce résultat pour prouver les théorèmes de la sous-section suivante.

Le lecteur connaissant les expériences des réseaux de preuve de la logique linéaire pourrait remarquer qu'un typage principal d'un terme normal est la même chose que le résultat de ce que [52] appelle *an injective obsessional* 1-*experiment* du réseau de preuve obtenu par les traductions de ce lambda-terme mentionnées dans la sous-section 6.3.3 de la partie I.

La notion de 1-typage est plus générale que celle de typage principale. C'est le résultat d'une *obsessional* 1-*experiment*.

Définition 8.2.5. *Le* 1-*typage des termes normaux :*

$$\frac{}{x : [\gamma] \vdash_1 x : \gamma}\ \gamma \in A$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash_1 t : \alpha}{\Gamma \vdash_1 \lambda x.t : (a, \alpha)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash_1 u_1 : \alpha_1 \qquad \dots \qquad \Gamma_n \vdash_1 u_n : \alpha_n}{\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i + \{(x, [[\alpha_1] \dots [\alpha_n]\gamma])\} \vdash_1 (x)u_1 \dots u_n : \gamma}$$

8.2.2 Relier la taille des dérivations et le temps d'exécution

Lemme 8.2.6. *Soit $x \in \mathcal{V}$ et soit $\Gamma \in \Phi$ tel que $[]$ a seulement des occurrences positives dans Γ. Supposons qu'il existe une dérivation de $\Gamma \vdash (x, e) : b_1 \dots b_q\alpha$, avec $x \notin dom(e)$, alors pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, $b_k \neq []$.*

Démonstration. Soit Π une telle dérivation. On pose $e = \{(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n)\}$. $\Pi = (\Pi_0, \{(x_1, \Pi_1), \dots, (x_n, \Pi_n)\})$, où

(i) Π_0 est une dérivation de $\Gamma_0, x_1 : a_1, \dots, x_n : a_n \vdash_R x : b_1 \dots b_q\alpha$,

(ii) pour $i \in \{1, \dots, n\}$, Π_i est une dérivation $\Gamma_i \vdash c_i : a_i$

(iii) et $\Gamma = \sum_{i=0}^{n} \Gamma_i$.

Par (i), puisque $x \notin \mathrm{dom}(e)$, $\Gamma_0(x) = [b_1 \dots b_q\alpha]$. Donc, par (iii), s'il existait $k \in \{1, \dots, q\}$ tel que $b_k = []$, il y aurait une occurrence négative de $[]$ dans Γ. □

Théorème 8.2.7. *Supposons $s = (c_0, (c_1, \dots, c_q)) \in \mathbb{S}$ tel que $(\overline{c_0})\overline{c_1} \dots \overline{c_q}$ est normalisable. Alors, si Π est une dérivation de $\Gamma \vdash s : \alpha$ et (Γ, α) est tel que $[]$ a seulement des occurrences négatives dans α et seulement des occurrences positives dans Γ, on a $l_\beta(s) \leq |\Pi|$.*

Démonstration. Par le Théorème 8.2.3, on peut prouver le théorème par induction bien fondée sur $l_\beta(s)$.

Dans le cas où $s = ((x, e), (c_1, \dots, c_q))$ et $x \notin \mathrm{dom}(e)$, on applique le Lemme 8.2.6. □

Proposition 8.2.8. *Soit $s \in \mathbb{S}$ tel que $\overline{s}$ soit normalisable et soit (Γ, α) un* 1-*typage de la forme normale de $\overline{s}$. Alors il existe une dérivation Π de $\Gamma \vdash s : \alpha$ telle que $l_\beta(s) = |\Pi|$.*

Démonstration. Par le Théorème 8.2.3, on peut prouver le théorème par induction bien fondée sur $l_\beta(s)$. Si $l_\beta(s) = 0$, c'est vrai, car on n'a jamais $l_\beta(s) = 0$. Sinon, il y a cinq cas :

– Dans le cas où $s = ((x, e), (c_1, \dots, c_q))$ et $x \notin \mathrm{dom}(e)$, (Γ, α) est un 1-typage de $(x)t_1 \dots t_q$, où $t_1, \dots, t_q$ sont les formes normales respectives de $\overline{c_1}, \dots, \overline{c_q}$, donc il existe $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ tels que

– $\Gamma = \sum_{k=1}^{q} \Gamma_k + \{(x, [[\alpha_1] \ldots [\alpha_q]\alpha])\}$
– et $(\Gamma_1, \alpha_1), \ldots, (\Gamma_q, \alpha_q)$ sont des 1-typages de $t_1, \ldots, t_q$ respectivement.

Par hypothèse d'induction, il existe q dérivations $\Pi_1, \ldots, \Pi_q$ de $\Gamma_1 \vdash_R t_1 : \alpha_1, \ldots, \Gamma_q \vdash_R t_q : \alpha_q$ respectivement. On note $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de dom(e). On note Π_0 la dérivation de $x : [[\alpha_1] \ldots [\alpha_q]\alpha] \vdash_R x : \alpha$. On pose $\Pi = ((\Pi_0, \{(x_1, \epsilon), \ldots, (x_n, \epsilon)\}), (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))$: c'est une dérivation de $\Gamma \vdash_R \overline{s} : \alpha$ et on a

$$\begin{aligned}
l_\beta(s) &= \sum_{k=1}^{q} l_\beta(c_k) + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| + 1 \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= |\Pi_0| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |(\Pi_0, \{(x_1, \epsilon), \ldots, (x_n, \epsilon)\})| + \sum_{k=1}^{q} |\Pi_k| \\
&= |((\Pi_0, \{(x_1, \epsilon), \ldots, (x_n, \epsilon)\}), (\Pi_1, \ldots, \Pi_q))| \\
&= |\Pi| \ .
\end{aligned}$$

– Dans le cas où $s = ((x_{i_0}, \{(x_1, c'_1), \ldots, (x_n, c'_n)\}), (c_1, \ldots, c_q))$ avec $1 \leq i_0 \leq n$, par hypothèse d'induction, il existe une dérivation Π' de $\Gamma \vdash (c'_{i_0}, (c_1, \ldots, c_q)) : \alpha$ telle que
  – t est la forme normale de $(\overline{c'_{i_0}})\overline{c_1} \ldots \overline{c_q}$;
  – (Γ, α) est un 1-typage de t ;
  – et $l_\beta(c'_{i_0}, (c_1, \ldots, c_q)) = |\Pi'|$.

  Par le Lemme 8.1.17, il existe une dérivation Π de $\Gamma \vdash s : \alpha$ telle que $|\Pi| = |\Pi'| + 1$. On a

$$\begin{aligned}
l_\beta(s) &= l_\beta((c'_{i_0}, (c_1, \ldots, c_q)) + 1 \\
&= |\Pi'| + 1 \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= |\Pi| \ .
\end{aligned}$$

– Dans le cas où $s = (((v)u, e), (c_1, \ldots, c_q))$, appliquer le Lemme 8.1.14.
– Dans le cas où $s = ((\lambda x.u, e), \epsilon)$, appliquer le Lemme 8.1.15.
– Dans le cas où $s = ((\lambda x.u, e), \pi)$ et $\pi \neq \epsilon$, appliquer le Lemme 8.1.18.

□

Théorème 8.2.9. *Supposons que t soit un terme normalisable et que (Γ, α) soit un typage principal de sa forme normale. Alors il existe une dérivation Π de $\Gamma \vdash_R t : \alpha$ telle que $l_\beta((t, \emptyset), \epsilon) = |\Pi|$.*

Démonstration. Appliquer la Proposition 8.2.8. □

Corollaire 8.2.10. *Pour tout $t \in \Lambda$, on a*

$$\begin{aligned}
l_\beta((t, \emptyset), \epsilon) = Inf\,\{ \quad |\Pi| \,;\, \exists(\Gamma, \alpha) \quad & [\,] \textit{ a seulement des occurrences négatives dans } \alpha \\
& \textit{et seulement des occurrences positives dans } \Gamma \\
& \textit{et } \Pi \textit{ est une dérivation de } \Gamma \vdash_R t : \alpha\} \ .
\end{aligned}$$

Démonstration. On distingue deux cas :
- t n'est pas normalisable : appliquer les Théorèmes 6.3.27 et 8.2.3 ;
- t est normalisable : appliquer les Théorèmes 8.2.7 et 8.2.9.

□

8.2.3 Relier la sémantique et le temps d'exécution

On obtient deux théorèmes similaires aux Théorèmes 8.1.29 et 8.1.30.

Théorème 8.2.11. *Soient v et u deux termes normaux clos. Supposons $(a, \alpha) \in [\![v]\!]$ et $Supp(a) \subseteq [\![u]\!]$. Si $[]$ n'a pas d'occurrences dans a et pas d'occurrences positives dans α, alors on a*

$$l_\beta(((v)u, \emptyset), \epsilon) \leq 2|a| + |\alpha| + 2 \ .$$

Démonstration. Posons $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Il existe une dérivation Π_0 de $\vdash_R v : (a, \alpha)$ et n dérivations $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ de $\vdash_R u : \alpha_1, \ldots, \vdash_R u : \alpha_n$ respectivement. Donc il existe une dérivation Π de $\vdash_R (v)u : \alpha$ telle que $|\Pi| = \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| + 1$. Par le Théorème 8.2.7, on a donc

$$\begin{aligned} l_\beta(((v)u, \emptyset), \epsilon) &\leq \sum_{i=0}^{n} |\Pi_i| + 1 \\ &\leq |(a, \alpha)| + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + 1 \\ &\quad \text{(par le Lemme 8.1.26)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{s}(\alpha_i) + |\alpha| + 1 + |a| + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + |\alpha| + 1 + |a| + 1 \\ &\quad \text{(par le Lemme 8.1.24)} \\ &= 2|a| + |\alpha| + 2 \ . \end{aligned}$$

□

Théorème 8.2.12. *Supposons A infini. Soient v et u deux termes normaux clos. On a*

$$\begin{aligned} l_\beta(((v)u, \emptyset), \epsilon) = \ Inf\,\{ \ & |(a', \alpha')| + |a''| + 1 \ ; \\ & (a, \alpha), (a', \alpha') \in [\![v]\!], Supp(a), Supp(a'') \subseteq [\![u]\!], \\ & [] \ \textit{n'a pas d'occurrences dans } a \textit{ et pas d'occurences positives dans } \alpha \\ & \textit{et } \exists s', s'' \in \mathcal{S} \ (s'(a', \alpha') = (a, \alpha) \textit{ et } s''(a'') = a)\} \ , \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des substitutions.

Démonstration. Appliquer le Corollaire 8.2.10 et la Proposition 8.1.28 . □

8.3 Travail ultérieur

Notre travail concerne le lambda-calcul et la machine de Krivine. Mais nous avons souligné les connections avec les réseaux de preuve de la logique linéaire. C'est pourquoi il est raisonnable de penser obtenir des résultats similaires reliant d'un côté le nombre d'étapes d'élimination des coupures des réseaux de preuve avec une stratégie qui mime celle de la machine de Krivine, et, de l'autre côté, la taille des résultats des expériences. Cette stratégie a été définie dans [42] pour un fragment de la logique linéaire.

Chapitre 9

Des types avec intersection pour le lambda-calcul léger

Pour l'essentiel, le contenu de ce chapitre a été publié dans [19].

Une manière de fournir des langages correspondant au calcul en temps polynomial est de passer par la correspondance entre preuves de la logique linéaire et programmes. En particulier, deux variantes de la logique linéaire avec une élimination des coupures en temps polynomial ont été proposées : la Logique Linéaire Légère ([26]) et la Logique Linéaire Douce ([37]). Ils peuvent être vus comme des raffinements du Système F permettant de caractériser des fonctions en temps polynomial : par la correspondance de Curry-Howard, ces systèmes permettent d'écrire des programmes qui peuvent être évalués en temps polynomial.

Deux nouveaux calculs de termes non typés basés sur les mêmes idées sont apparus aussi : le *Lambda-Calcul Affine Léger* ([50]) et le *Lambda-Calcul Doux* ([37]). Terui a introduit le Lambda-Calcul Affine Léger (il nous arrivera d'écrire *lambda-calcul léger*) comme un raffinement du lambda-calcul non typé pour lequel la *Logique Affine Légère Intuitionniste* (**ILAL**, [1] et [2]), une variante de la logique linéaire légère, fournit un système d'assignation de types ; un terme léger peut ainsi être vu comme une manière de noter un réseau de **ILAL**. Il a démontré que ce calcul de termes satisfait une propriété de normalisation forte en un nombre polynomial d'étapes : un terme non typé est normalisable en un nombre polynomial d'étapes en sa taille quelles que soient les réductions. Ceci semble suggérer que les types de *ILAL* sont inutiles. Cependant, tel n'est pas le cas, car si les types ne sont pas nécessaires pour assurer la borne de complexité sur la réduction, ils sont utiles pour garantir que le terme se réduit en un résultat sensé. En effet, les lambda-termes légers transportent plus d'informations que les lambda-termes ordinaires et il existe une application oublieuse (le *gommage*) de ces termes vers les lambda-termes ordinaires. Certains lambda-termes légers peuvent être en forme normale mais correspondre à des lambda-termes avec redex. La raison en est que certains termes légers montrent des configurations qui peuvent être vues de manière naturelle comme des erreurs (en particulier, des erreurs de "pattern-matching"). On aimerait donc pouvoir considérer *tous* les lambda-termes légers utilisables (ceux pour lesquels la normalisation peut s'accomplir sans obtenir d'erreurs), et *seulement* ceux-ci. Ceci est d'autant plus naturel que le lambda-calcul léger peut être utilisé dans un autre cadre que celui du second ordre : en particulier, dans [51], Terui l'utilise pour extraire des programmes de preuves en théorie affine légère des ensembles ; de plus, on peut considérer des extensions de **ILAL** utilisant des types récursifs comme dans [5] (cela a été fait dans [4]).

Ici, nous nous attaquons précisément au problème de caractériser les lambda-termes légers sans erreurs. Dans la Section 9.3, nous donnons une définition formelle des termes qui peuvent être raison-

nablement regardés comme étant des termes sans erreurs : ces sont les *termes raisonnables*. Tout d'abord, nous remarquons que, dans **ILAL**, tout pseudo-terme typable est un terme raisonnable, (Théorème 9.3.8) et que tout terme raisonnable normal est typable (Théorème 9.3.9), mais que ce système ne type pas tous les termes raisonnables (Remarque 9.3.10). C'est pourquoi nous introduisons un nouveau système d'assignation de types, dénommé *Système d'Assignation de Types avec Intersection Légère* (**LI**), un système de types avec intersection. Les types avec intersection avaient été introduits dans [16] dans le but de dépasser les limites des types habituels et ont été utilisés pour caractériser les termes fortement normalisables, les termes normalisables et les termes normalisables de tête (voir, par exemple, [35]). De même, nous dépassons les limites de **ILAL** en montrant que les pseudo-termes typables dans **LI** sont exactement les termes raisonnables (Théorème 9.4.17).

Enfin, nous introduisons un *Système Relâché d'Assignation de Types avec Intersection Légère* dans lequel les pseudo-termes typables sont exactement les termes qui se réduisent sans erreurs : les éventuelles erreurs que le pseudo-terme typable contenait seront effacées au cours de la réduction. Ce système, contrairement au précédent a la propriété suivante : étant donnés deux termes équivalents t et t' (ce qui revient à dire qu'ils ont la même forme normale), t est typable si, et seulement si, t' est typable. Mieux, il fournit même une réelle sémantique : si t et t' sont typables, ils sont typables avec les mêmes types.

En passant, on remarque que les problèmes de typabilité dans **LI** et dans **RLI**, contrairement aux systèmes de types avec intersection pour le lambda-calcul, sont décidables, puisque les termes typables dans chacun des deux systèmes sont fortement normalisables.

Notation

Si S est un ensemble, alors $\mathcal{P}_f(S)$ est une notation pour l'ensemble des parties finies de S et $\mathcal{P}^*_f(S)$ est une notation pour $\mathcal{P}_f(S) \setminus \{\emptyset\}$.

9.1 Le lambda-calcul affine léger

On rappelle ici le matériel requis concernant le *lambda-calcul affine léger* ; voir [50] pour une exposition complète.

Les termes du lambda-calcul léger peuvent être vus comme une syntaxe alternative aux réseaux, dans le cadre intuitionniste.

La définition des termes se fait en deux étapes : d'abord, on définit les pseudo-termes ; ensuite, les termes sont définis en imposant certaines conditions sur les pseudo-termes correspondant à la bonne formation des boîtes.

Définition 9.1.1. *L'ensemble $\mathcal{PT}$ des pseudo-termes est défini par la grammaire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{PT} & ::= & \mathcal{V} \mid (\mathcal{PT})\mathcal{PT} \mid \lambda\mathcal{V}.\mathcal{PT} \mid\, !\mathcal{PT} \mid \textsf{let}\, \mathcal{PT}\ \textsf{be}\ !\mathcal{V}\ \textsf{in}\, \mathcal{PT} \\ & & \mid \S\mathcal{PT} \mid \textsf{let}\, \mathcal{PT}\ \textsf{be}\ \S\mathcal{V}\ \textsf{in}\, \mathcal{PT} \end{array}$$

Les *boîtes* ! (respectivement les *boîtes* §) sont les pseudo-termes de la forme $!t$ (respectivement de la forme $\S t$).

Dans la suite, le symbole † remplace ou bien ! ou bien § ; de plus, on identifie les pseudo-termes α-équivalents (les occurrences de x dans v sont liées dans $\textsf{let}\ u\ \textsf{be}\ \dagger x\ \textsf{in}\ v$) : c'est pourquoi dans nos preuves, nous pouvons toujours supposer que les variables libres sont différentes des variables liées. Pour tous les pseudo-termes t, $FV(t)$ est une notation pour l'ensemble des variables libres dans t,

Nom	*Redex*	*Réduit*
(β)	$(\lambda x.t)u$	t[u/x]
(!)	let $!u$ be $!x$ in t	t[u/x]
(§)	let $\S u$ be $\S x$ in t	t[u/x]
(com)	(let u be $\dagger\, x$ in t)v	let u be $\dagger\, x$ in $(t)v$
	let let u be $\dagger_1\, x$ in t be $\dagger_2\, y$ in v	let u be $\dagger_1\, x$ in let t be $\dagger_2\, y$ in v

Fig. 9.1 – Règles de réduction

$FO(x,t)$ est une notation pour le nombre d'occurrences libres de x dans t et $FO(t)$ est une notation pour le nombre d'occurrences libres dans t de toutes les variables. La taille d'un pseudo-terme est le nombre de nœuds dans l'arbre qui représente le terme. Etant donnés un pseudo-terme t et une adresse w, la profondeur de w dans t est le nombre de boîtes ! et de boîtes § contenant la sous-expression à l'adresse w. La profondeur de t est la profondeur maximale de toutes les adresses dans t.

Définition 9.1.2. *Soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}_f(\mathcal{V})$ deux à deux disjoints. Alors $\mathcal{T}_{X,Y,Z}$ est l'ensemble des pseudo-termes défini ainsi :*

(i) $x \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow x \in X$;

(ii) $\lambda x.t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t \in \mathcal{T}_{X\cup\{x\},Y,Z}, x \notin X, FO(x,t) \leq 1$;

(iii) $(t)u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t, u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$;

(iv) $!t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t \in \mathcal{T}_{Y,\emptyset,\emptyset}, FO(t) \leq 1$;

(v) $\S t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t \in \mathcal{T}_{Y\cup Z,\emptyset,\emptyset}$;

(vi) let t be $!x$ in $u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}, u \in \mathcal{T}_{X,Y\cup\{x\},Z}, x \notin Y$;

(vii) let t be $\S x$ in $u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z} \Leftrightarrow t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}, u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z\cup\{x\}}, x \notin Z, FO(x,u) \leq 1$.

Enfin, t est un terme ($t \in \mathcal{T}$) si $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ pour certains X, Y et Z.

Noter que si $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, alors les variables libres de t sont incluses dans $X \cup Y \cup Z$.

La condition (iv) correspond au fait que, dans un réseau de **LAL**, une boîte ! doit avoir au plus une porte auxiliaire.

Lemme 9.1.3. *Soit $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$. Si $x \notin FV(t)$, alors $t \in \mathcal{T}_{X\setminus\{x\},Y\setminus\{x\},Z\setminus\{x\}}$.*

Exemples :
- $\lambda x.$let x be $!y$ in y, $\lambda x.$let x be $!y$ in $!!y \notin \mathcal{T}$;
- $\lambda x.$let x be $!z$ in $\S\lambda y.(z)\ldots(z)y \in \mathcal{T}$.

Terui a fourni un algorithme quadratique vérifiant si un pseudo-terme donné est un terme.

Les règles de réduction sont celles données dans la Figure 9.1 avec la restriction suivante : dans la règle (com), $x \notin FV(v)$. $\longrightarrow_0$ est une notation pour la réduction en une étape et $\longrightarrow$ est une notation pour la clôture transitive réflexive de $\longrightarrow_0$.

Terui a prouvé la proposition et le théorème suivants :

Proposition 9.1.4. *Si $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ et $t \longrightarrow u$, alors $u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$.*

Théorème 9.1.5. *Pour tout terme t_0 de taille s et de profondeur d, les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) toute suite de réductions commençant à t_0 a une longueur bornée par $O(s^{2^{d+1}})$;

(ii) tout terme en lequel t_0 se réduit a une taille bornée par $O(s^{2^d})$.

D'où, par le Lemme de König, pour tout terme t, nous pouvons définir $N(t)$ comme étant la somme des longueurs de toutes les suites de réductions possibles. De plus, en appliquant le Lemme de Newman, nous obtenons, comme corollaire, que $\longrightarrow$ satisfait la propriété de Church-Rosser.

Un autre corollaire est la normalisation forte en temps polynomiale (voir [50]).

Le *gommage* d'un terme léger t est défini, par induction sur t, comme étant un lambda-terme :

- si $t = \dagger u$, alors erasure(t) = erasure(u) ;
- si $t = \text{let } u \text{ be } \dagger x \text{ in } v$, alors erasure($t$) = erasure($v$)[erasure($u$)/$x$] ;
- erasure commute aux autres constructions.

Pour tous termes t et t', si $t \longrightarrow t'$, alors erasure(t) β erasure(t'). Mais voici un exemple d'un terme normal dont le gommage est un lambda-terme non normalisable :

$$\text{let } \lambda x.\text{let } x \text{ be } !y \text{ in } \S(y)y \text{ be } !y \text{ in } \S(y)y \ .$$

Ce terme est un exemple d'un terme qui peut être vu comme une *erreur*.

9.2 Le système d'assignation de types ILAL$_\mathbf{N}$

On présente la *Logique Affine Légère Intuitionniste* comme un système d'assignation de types pour le *lambda-calcul affine léger* : **ILAL$_\mathbf{N}$** est un système d'assignation de types du second ordre dans le style de la déduction naturelle.

Définition 9.2.1. *Les types de* **ILAL$_\mathbf{N}$** *sont donnés par la grammaire suivante :*

$$\mathcal{F} ::= \mathcal{P} \mid (\mathcal{F} \multimap \mathcal{F}) \mid \forall\mathcal{P}\,\mathcal{F} \mid !\mathcal{F} \mid \S\mathcal{F} \ .$$

Les connecteurs $\exists, \otimes, \mathbf{1}, \&, \otimes$ et $\mathbf{0}$ sont définissables à partir de $\multimap$ et $\forall$. En particulier, $\mathbf{0} \equiv \forall\alpha\ \alpha$.

Un $\dagger$-*type déchargé* est une expression de la forme $[A]_\dagger$, où A est un type (non-déchargé). Une déclaration est une expression de la forme $x : A$ ou $x : [A]_\dagger$. Un contexte est unensemble fini de déclarations.

Si Γ est le contexte $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ dans lequel tous les types sont déchargés, alors $[\Gamma]_\dagger$ est une notation pour le contexte $x_1 : [A_1]_\dagger, \ldots, x_n : [A_n]_\dagger$. Si Γ contient une déclaration avec un type déchargé, alors $[\Gamma]_\dagger$ est indéfini.

Définition 9.2.2. *Les règles d'assignation de types de* **ILAL$_\mathbf{N}$** *sont celles données dans la Figure 9.2.*

Remarque 9.2.3. *Le Système ILAL$_N$ satisfait la propriété de "subterm typability" (si un pseudo-terme t est typable, alors tout sous-pseudo-terme de t est typable).*

Dans [50], on peut trouver les preuves des deux théorèmes suivants.

Théorème 9.2.4. *Tout pseudo-terme typable est un terme.*

Théorème 9.2.5. *Si $\Gamma \vdash_{ILAL_N} t : A$ est dérivable et $t \to t'$, alors $\Gamma \vdash ILAL_N t' : A$ est dérivable.*

On pose $\mathbf{bint} = \forall\alpha\ !(\alpha \multimap \alpha) \multimap\ !(\alpha \multimap \alpha) \multimap \S(\alpha \multimap \alpha)$.

Théorème 9.2.6 ([26], [47]). *Toute fonction $f : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ calculable en temps $O(n^d)$ est representé par un terme de type* $\mathbf{bint} \multimap \S^{d+6}\mathbf{bint}$.

$$\frac{}{x : A, \Gamma \vdash x : A}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash v : (C \multimap A) \qquad \Gamma \vdash u : C}{\Gamma \vdash (v)u : A}\ \multimap \mathrm{E} \qquad \frac{x : C, \Gamma \vdash u : B \quad \mathrm{FO}(x,u) \leq 1}{\Gamma \vdash \lambda x.u : (C \multimap B)}\ \multimap \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \forall\alpha\, C}{\Gamma \vdash t : C[B/\alpha]}\ \forall\mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : C \quad \alpha \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash t : \forall\alpha\, C}\ \forall\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : !C \qquad x : [C]_!, \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v : A}\ !\mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : C \quad \mathrm{FO}(u) \leq 1}{[\Gamma]_!, \Delta \vdash !u : !C}\ !\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \S C \qquad x : [C]_\S, \Gamma \vdash v : A \quad \mathrm{FO}(x,v) \leq 1}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v : A}\ \S\mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma, \Sigma \vdash u : C}{[\Gamma]_!, [\Sigma]_\S, \Delta \vdash \S u : \S C}\ \S\mathrm{I}$$

FIG. 9.2 – Le système d'assignation de types $\mathbf{ILAL_N}$

Name	*Redex*	*Contractum*
$(Ap\dagger)$	$(\dagger v)u$	*erreur*
$(\lambda\dagger)$	let $\lambda x.u$ be $\dagger y$ in v	*erreur*
$(\S!)$	let $\S u$ be $!x$ in v	*erreur*
$(!\S)$	let $!u$ be $\S x$ in v	*erreur*

FIG. 9.3 – De nouvelles règles de réduction

9.3 Les vrais termes, les termes sûrs et les termes raisonnables

Nous avons déjà rencontré un exemple de terme qui peut être vu comme une erreur. Dans cette section, nous clarifions cette notion.

Nous commençons par donner une définition formelle des terms normaux sans erreurs : ce seront les *vrais termes*.

Définition 9.3.1. *On définit l'ensemble* $\mathcal{TT}$ *des* vrais termes *et l'ensemble* $\mathcal{WT}$ *des* termes sages *ainsi :* $\mathcal{TT} = \mathcal{TPT} \cap \mathcal{T}$ *et* $\mathcal{WT} = \mathcal{WPT} \cap \mathcal{T}$*, où* $\mathcal{TPT}$ *et* $\mathcal{WPT}$ *sont les ensembles définis par la grammaire suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{WPT} & ::= & \mathcal{V} \mid (\mathcal{WPT})\mathcal{TPT} \\ \mathcal{TPT} & ::= & \mathcal{WPT} \mid \lambda\mathcal{V}.\mathcal{TPT} \mid !\mathcal{TPT} \mid \mathsf{let}\ \mathcal{WPT}\ \mathsf{be}\ !\mathcal{V}\ \mathsf{in}\ \mathcal{TPT} \\ & & \mid \S\mathcal{TPT} \mid \mathsf{let}\ \mathcal{WPT}\ \mathsf{be}\ \S\mathcal{V}\ \mathsf{in}\ \mathcal{TPT} \end{array}$$

Remarquer que l'on a : {termes sages} $\subsetneq$ {termes vrais} $\subsetneq$ {termes normaux}.

Dans le but de justifier cette définition, il peut être montré que si l'on ajoute un nouveau terme *erreur* et les règles de réduction données en la Figure 9.3, alors la nouvelle relation de réduction a la propriété de Church-Rosser (en utilisant le Lemme de Hindley-Rosen) et tout terme se réduit soit en un vrai terme, soit en un terme dont *erreur* est un sous-terme.

Définition 9.3.2. *Un terme est dit être* sûr *s'il se réduit en un vrai terme ; il est dit être* raisonnable *si tout sous-terme normal de tout terme en lequel il se réduit est vrai.*

Remarquer que l'on a : {vrais termes} $\subsetneq$ {termes raisonnables} $\subsetneq$ {termes sûrs}.

De plus, le gommage de tout vrai terme est normal et le gommage tout terme sûr est normalisable : une preuve de ce que le gommage de tout terme raisonnable est fortement normalisable sera donnée dans la Section 9.4.

Définition 9.3.3. *On dit qu'une formule est* ouverte *si elle ne commence pas par* $\forall$.

Fait 9.3.4. *Pour tout contexte* Γ*, pour toute formule ouverte* A*, pour toute variable* x*, pour tout terme* u*, si* $\Gamma \vdash \lambda x.u : A$*, alors* A *s'écrit* $(C \multimap B)$.

Fait 9.3.5. *Pour tout contexte* Γ*, pour toute formule ouvertes* A*, pour tout terme* u*, si* $\Gamma \vdash\, !u : A$*, alors* A *s'écrit* $!C$.

Fait 9.3.6. *Pour tout contexte* Γ*, pour toute formule ouverte* A*, pour tout terme* u*, si* $\Gamma \vdash \S u : A$*, alors* A *s'écrit* $\S C$.

Lemme 9.3.7. *Tout terme normal typable est vrai.*

Démonstration. On prouve, par induction sur π, que pour toute derivation π, pour toute formule A, pour tout contexte Γ, pour tout terme normal t, si π est une derivation de $\Gamma \vdash t : A$, alors t est un vrai terme :

– π est $\dfrac{}{x : A, \Gamma' \vdash x : A}\text{Ax}$: t est une variable ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash v : (C \multimap A) \qquad \Gamma \vdash u : C}{\Gamma \vdash (v)u : A} \multimap \text{E}$: v est sage, parce que :
  – comme $(v)u$ est normal, v est normal et ne s'écrit ni $\lambda x.v_1$ ni $\mathsf{let}\ v_1\ \mathsf{be}\ \dagger x\ \mathsf{in}\ v_2$;
  – de plus, par les Faits 9.3.5 and 9.3.6, v ne s'écrit pas $\dagger v_1$;
  – enfin, par hypothèse d'induction, v est un vrai terme ;
  de plus, comme $(v)u$ est normal, u est normal, donc, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme ;
– π se termine par $\dfrac{x : C, \Gamma \vdash u : B \quad \text{FO}(x, u) \leq 1}{\Gamma \vdash \lambda x.u : (C \multimap B)} \multimap \text{I}$: comme $\lambda x.u$ est normal, u est normal, donc, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash t : \forall\alpha\, C}{\Gamma \vdash t : C[B/\alpha]}\forall\text{E}$: appliquer l'hypothèse d'induction ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash t : C \quad \alpha \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash t : \forall\alpha\, C}\forall\text{I}$: appliquer l'hypothèse d'induction ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash u : !C \qquad x : [C]_!, \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v : A}!\text{E}$: u est sage, parce que :
  – comme $\mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$ est normal, u est normal et ne s'écrit ni $!u_1$ ni $\mathsf{let}\ u_1\ \mathsf{be}\ \dagger x\ \mathsf{in}\ u_2$;
  – de plus, par les Faits 9.3.4 et 9.3.6, u ne s'écrit ni $\lambda y.u_1$ ni $\S u_1$;
  – enfin, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme ;
  de plus, comme $\mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$ est normal, v est normal, donc, par hypothèse d'induction, v est un vrai terme ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma' \vdash u : C}{[\Gamma']_!, \Delta \vdash\, !u : !C}!\text{I}$: comme $!u$ est normal, u est normal, donc, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme ;
– π se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash u : \S C \qquad x : [C]_\S, \Gamma \vdash v : A \quad \text{FO}(x, v) \leq 1}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v : A}\S\text{E}$: u est sage, parce que :
  – comme $\mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$ est normal, u est normal and ne s'écrit ni $\S u_1$ ni $\mathsf{let}\ u_1\ \mathsf{be}\ \dagger x\ \mathsf{in}\ u_2$;
  – de plus, par les Faits 9.3.4 et 9.3.5, u ne s'écrit ni $\lambda y.u_1$ ni $!u_1$;
  – enfin, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme ;
  de plus, comme $\mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$ est normal, v est normal, donc, par hypothèse d'induction, v est un vrai terme ;

– π se termine par $\dfrac{\Gamma, \Sigma \vdash u : C}{[\Gamma]_!, [\Sigma]_\S, \Delta \vdash \S u : \S C}\ \S I$: comme $\S u$ est normal, u est normal, donc, par hypothèse d'induction, u est un vrai terme.

□

Théorème 9.3.8. *Tout pseudo-terme typable est un terme raisonnable.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence du Théorème 9.2.4, du Théorème de "Subject Reduction" pour $\mathbf{ILAL_N}$, de la propriété de "subterm typability" et du Lemme 9.3.7. □

Pour tous $x_1, \ldots, x_{k_1}, y_1, \ldots, y_{k_2}, z_1, \ldots, z_{k_3} \in \mathcal{V}$, $\Gamma_{\{x_1,\ldots,x_{k_1}\},\{y_1,\ldots,y_{k_2}\},\{z_1,\ldots,z_{k_3}\}}$ est une notation pour le contexte suivant :

$$x_1 : \mathbf{0}, \ldots, x_{k_1} : \mathbf{0}, y_1 : [\mathbf{0}]_!, \ldots, y_{k_2} : [\mathbf{0}]_!, z_1 : [\mathbf{0}]_\S, \ldots, z_{k_3} : [\mathbf{0}]_\S.$$

Théorème 9.3.9. *Tout vrai terme est typable.*

Démonstration. On prouve, par induction sur t, que pour tout vrai terme t (respectivement tout terme raisonnable t), pour tous $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$, si $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, alors il existe une formule T telle que (respectivement pour toute formule T, on a) $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : T$:

– $t \in \mathcal{WT}$: soit T une formule :
  – Cas 1 : t est une variable : $t \in X$, donc on a $\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : \mathbf{0}}\ Ax}{\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : T}\ \forall E$;
  – Cas 2 : $t = (w)r$, $w \in \mathcal{WT}$ et $r \in \mathcal{TT}$: $w, r \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, donc, par hypothèse d'induction, $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash r : R$ et $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash w : (R \multimap T)$; d'où $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : T$;
– $t = !u$ et $u \in \mathcal{TT}$: $u \in \mathcal{T}_{Y,\emptyset,\emptyset}$; donc, par hypothèse d'induction, $\Gamma_{Y,\emptyset,\emptyset} \vdash u : U$; d'où $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : !U$;
– $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$, $u \in \mathcal{WT}$ et $v \in \mathcal{TT}$: $u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ et $v \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$; donc, par hypothèse d'induction, $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash u : !\mathbf{0}$ and $\Gamma_{X,Y\cup\{x\},Z} \vdash v : V$; d'où $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : V$;
– $t = \S u$ et $u \in \mathcal{TT}$: $u \in \mathcal{T}_{Y\cup Z,\emptyset,\emptyset}$; donc, par hypothèse d'induction, $\Gamma_{Y\cup Z,\emptyset,\emptyset} \vdash u : U$; d'où $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : \S U$;
– $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v$, $u \in \mathcal{WT}$ et $v \in \mathcal{TT}$: $u \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ et $v \in \mathcal{T}_{X,Y,Z\cup\{x\}}$; donc, par hypothèse d'induction, $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash u : \S\mathbf{0}$ et $\Gamma_{X,Y,Z\cup\{x\}} \vdash v : V$; d'où $\Gamma_{X,Y,Z} \vdash t : V$.

□

Remarque 9.3.10. *Néanmoins, il existe des termes raisonnables non typables. Exemple :*

$$G = \mathit{let}\ !\lambda x.\mathit{let}\ x\ \mathit{be}\ !x'\ \mathit{in}\ \S(x')x'\quad \mathit{be}\ !x'\quad \mathit{in}\ \S\lambda y.((y)(x')!\lambda x.x)(x')!\lambda x.\lambda y.x\ .$$

Bien que son gommage soit typable dans le Système F, G est un terme raisonnable qui n'est pas typable dans $\mathbf{ILAL_N}$. *En effet, on peut définir une nouvelle traduction dans le lambda-calcul : le* biffage *; on note cross(t) le biffage d'un terme t, il est défini par induction sur t :*

– *si $t = \dagger u$, alors $cross(t) = cross(u)$;*
– *si $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \dagger\ x\ \mathsf{in}\ v$, alors $cross(t) = (\lambda x.cross(v))cross(u)$;*
– *cross commute aux autres constructions ;*

et on peut montrer que si l'un terme est typable dans $\mathbf{ILAL_N}$, *alors son biffage est typable dans le Système F. Et le biffage de G, i.e.*

$$(\lambda x'.\lambda y.((y)(x')\lambda x.x)(x')\lambda x.\lambda y.x)\lambda x.(\lambda x'.(x')x')x,$$

n'est pas typable dans le Système F (voir [24]).

$$\frac{\alpha \in a}{x : a, \Gamma \vdash_\cap x : \alpha}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\cap v : (\beta \multimap \alpha) \qquad \Gamma \vdash_\cap u : \beta}{\Gamma \vdash_\cap (v)u : \alpha} \multimap \mathrm{E} \qquad \frac{x : \{\beta\}, \Gamma \vdash_\cap u : \alpha \quad \mathrm{FO}(x,u) \leq 1}{\Gamma \vdash_\cap \lambda x.u : (\beta \multimap \alpha)} \multimap \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\cap u : a \qquad x : [a]_!, \Gamma \vdash_\cap v : \alpha}{\Gamma \vdash_\cap \text{let } u \text{ be } !x \text{ in } v : \alpha}\ !\mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash_\cap u : \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash_\cap u : \alpha_n \ n \geq 1 \ \mathrm{FO}(u) \leq 1}{[\Gamma]_!, \Delta \vdash_\cap !u : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}\ !\mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\cap u : \S\beta \qquad x : [\{\beta\}]_\S, \Gamma \vdash_\cap v : \alpha \quad \mathrm{FO}(x,v) \leq 1}{\Gamma \vdash_\cap \text{let } u \text{ be } \S x \text{ in } v : \alpha}\ \S\mathrm{E} \qquad \frac{\Gamma, \Sigma \vdash_\cap u : \beta}{[\Gamma]_!, [\Sigma]_\S, \Delta \vdash_\cap \S u : \S\beta}\ \S\mathrm{I}$$

où $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_\cap$ et $a \in \mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap)$

FIG. 9.4 – Le système d'assignation de types avec intersection légère (**LI**)

9.4 Le système d'assignation de types avec intersection légère (LI)

Comme on l'a vu dans la sous-section précédente, $\mathbf{ILAL_N}$ permet de donner une condition suffisante pour qu'un terme soit raisonnable. Maintenant, nous voulons définir un système qui type plus de termes raisonnables. Pour cela, nous utilisons l'approche des types avec intersection.

Définition 9.4.1. *L'ensemble $\mathcal{F}_\cap$ des types est defini par la grammaire suivante : $\mathcal{F}_\cap ::= \mathcal{P} \mid (\mathcal{F}_\cap \multimap \mathcal{F}_\cap) \mid \mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap) \mid \S\mathcal{F}_\cap$.*
L'ensemble $!\text{-}\mathcal{DF}_\cap$ est $\{[\alpha]_!\ ;\ \alpha \in \mathcal{F}_\cap\}$. L'ensmble $\S\text{-}\mathcal{DF}_\cap$ est $\{[\alpha]_\S\ ;\ \alpha \in \mathcal{F}_\cap\}$.
Un contexte est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}$ vers

$$\mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap) \cup \mathcal{P}_f^*(!\text{-}\mathcal{DF}_\cap) \cup \mathcal{P}_f^*(\S\text{-}\mathcal{DF}_\cap)\ .$$

Pour tous $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$, $C_{X,Y,Z}$ est l'ensemble des contextes Γ tels que $\forall x \in X \cap dom(\Gamma), \Gamma(x) \in \mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap)$, $\forall y \in Y \cap dom(\Gamma), \Gamma(y) \in \mathcal{P}_f^*(!\text{-}\mathcal{DF}_\cap)$ et $\forall z \in Z \cap dom(\Gamma), \Gamma(z) \in \mathcal{P}_f^*(\S\text{-}\mathcal{DF}_\cap)$.

A partir de maintenant, nous utiliserons les lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots$ pour les types et les lettres latines $a, b, \ldots$ pour les ensembles finis de types.

Un élément de $\mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap)$ peut être vu comme l'intersection de ses éléments.

Pour tout $a \in \mathcal{P}_f^*(\mathcal{F}_\cap)$, $[a]_\dagger$ est une notation pour $\{[\alpha]_\dagger\ ;\ \alpha \in a\}$.

Définition 9.4.2. *Les règles d'assignation de types sont celles données dans la Figure 9.4.*

Remarquer que la règle !I a n prémisses.

Remarque 9.4.3. *Ce système satisfait la propriété de "subterm typability".*

Définition 9.4.4. *On définit une relation binaire $\leq$ sur l'ensemble des contextes ainsi : $\Gamma \leq \Gamma'$ si, et seulement si, $dom(\Gamma) \subseteq dom(\Gamma')$ et $\forall x \in dom(\Gamma)\ \Gamma(x) \subseteq \Gamma'(x)$.*

Fait 9.4.5. *Pour tout $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, pour tout type α, pour tous contextes Γ et Γ' tels que $\Gamma \leq \Gamma'$, si $\Gamma \vdash_\cap t : \alpha$, alors $\Gamma' \vdash_\cap t : \alpha$.*

Pour tout contexte Γ, pour tout terme t, Γ_t est une notation pour $\{(x, \mathfrak{a}) \in \Gamma\ ; x$ est libre dans $t\}$.

Fait 9.4.6. *Pour tout contexte Γ, pour tout terme t, pour tout type α, $\Gamma \vdash_\cap t : \alpha$ si, et seulement si, $\Gamma_t \vdash_\cap t : \alpha$.*

9.4.1 "Subject Reduction"

Lemme 9.4.7. *Soit Γ un contexte et soient $x_1, \ldots, x_{k_1}$, $y_1, \ldots, y_{k_2}$, $z_1, \ldots, z_{k_3}$ des variables telles que $x_1, \ldots, x_{k_1}, y_1, \ldots, y_{k_2}, z_1, \ldots, z_{k_3} \notin dom(\Gamma)$. Si $\Gamma, x_1 : \{\alpha_1\}, \ldots, x_{k_1} : \{\alpha_{k_1}\}, y_1 : [b_1]_!, \ldots, y_{k_2} : [b_{k_2}]_!, z_1 : [\{\gamma_1\}]_\S, \ldots, z_{k_3} : [\{\gamma_{k_3}\}]_\S \vdash_\cap t : \alpha$, pour tout $i \in \{1, \ldots, k_1\}, \Gamma \vdash_\cap u_i : \alpha_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, k_2\}, \Gamma \vdash_\cap !v_i : b_i$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, k_3\}, \Gamma \vdash_\cap \S w_i : \S\{\gamma_i\}$, alors*

$$\Gamma \vdash_\cap t[u_1/x_1, \ldots, u_{k_1}/x_{k_1}, v_1/y_1, \ldots, v_{k_2}/y_{k_2}, w_1/z_1, \ldots, w_{k_3}/z_{k_3}] : \alpha.$$

Démonstration. Par induction sur t. □

Lemme 9.4.8. *Pour tout terme t, si $\Gamma \vdash_\cap t : \alpha$ et $t \longrightarrow_0 t'$, alors $\Gamma \vdash_\cap t' : \alpha$.*

Démonstration. D'abord, remarquer que, par la Proposition 9.1.4, t' est un terme. Maintenant, on prouve le Lemme par induction sur t : les cas critiques sont les suivants :
- $t = (\lambda x.v_1)u$ et $t' = v_1[u/x]$;
- $t = \mathsf{let}\ !u_1\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$ et $t' = v[u_1/x]$;
- $t = \mathsf{let}\ \S u_1\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v$ et $t' = v[u_1/x]$.

Dans tous ces cas, supposer que $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ et appliquer le Lemme 9.4.7. □

Proposition 9.4.9. *Pour tout terme t, si $\Gamma \vdash_\cap t : \alpha$ et $t \longrightarrow t'$, alors $\Gamma \vdash_\cap t' : \alpha$.*

Démonstration. C'est une conséquence du Lemme 9.4.8. □

9.4.2 Pseudo-termes typables et termes raisonnables

Proposition 9.4.10. *Pour tout pseudo-terme t, si*

$$x_1 : a_1, \ldots, x_{k_1} : a_{k_1}, y_1 : [b_1]_!, \ldots, y_{k_2} : [b_{k_2}]_!, z_1 : [\{\gamma_1\}]_\S, \ldots, z_{k_3} : [\{\gamma_{k_3}\}]_\S \vdash_\cap t : \alpha$$

est dérivable, alors $t \in \mathcal{T}_{\{x_1,\ldots,x_{k_1}\},\{y_1,\ldots,y_{k_2}\},\{z_1,\ldots,z_{k_3}\}}$.

Démonstration. Par induction sur le pseudo-terme t. □

Lemme 9.4.11. *Tout terme normal typable est vrai.*

Démonstration. Par induction sur le terme. □

Proposition 9.4.12. *Tout pseudo-terme typable est un terme raisonnable.*

Démonstration. Soit t un pseudo-terme typable. D'abord, par la Proposition 9.4.10, t est un terme. Maintenant, soit t' tel que $t \longrightarrow t'$. Par la Proposition 9.4.9, t' est typable ; d'où, tout sous-terme normal de t' est typable et, par le Lemme 9.4.11, est un vrai terme. □

9.4.3 Les termes raisonnables sont typables

Pour tous contextes Γ_1 et Γ_2, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est une notation pour $\{(x, \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x))\ ;\ x \in \mathrm{dom}(\Gamma_1) \cap \mathrm{dom}(\Gamma_2)\} \cup \{(x, \Gamma_1(x))\ ;\ x \in \mathrm{dom}(\Gamma_1) \setminus \mathrm{dom}(\Gamma_2)\} \cup \{(x, \Gamma_2(x))\ ;\ x \in \mathrm{dom}(\Gamma_2) \setminus \mathrm{dom}(\Gamma_1)\}$.

Lemme 9.4.13. *Pour tout vrai terme t (respectivement tout terme sage t), pour tous $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$, si $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ et pour tout $z \in Z$, $FO(z, t) \leq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$ (respectivement pour tout $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$), il existe $\Gamma \in C_{X,Y,Z}$ tel que :*

(i) $\Gamma \vdash_\cap t : \alpha$;

(ii) *et pour tout* $w \in dom(\Gamma)$, *si* $FO(w, t) \leq 1$, *alors* $Card(\Gamma(w)) = 1$.

Démonstration. Par le Lemme 9.1.3 et le Fait 9.4.6, on peut supposer que $FV(t) = X \cup Y \cup Z$. Maintenant, on prouve le lemme par induction sur t :

- t est un terme sage : soit $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$:
  - Cas 1 : t est une variable : on a $\dfrac{}{t : \{\alpha\} \vdash_\cap t : \alpha}\,\mathrm{Ax}$;
  - Cas 2 : $t = (v)r$, v est un terme sage et r est un vrai terme : par hypothèse d'induction, il existe $\beta \in \mathcal{F}_\cap$ et $\Gamma^r \in C_{X,Y,Z}$ tels que :

    (i) $\Gamma^r \vdash_\cap r : \beta$;

    (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^r)$, si $\mathrm{FO}(w, r) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^r(w)) = 1$;

    de nouveau, par hypothèse d'induction, il existe $\Gamma^v \in C_{X,Y,Z}$ tel que :

    (i) $\Gamma^v \vdash_\cap v : (\beta \multimap \alpha)$;

    (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^v)$, si $\mathrm{FO}(w, v) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^v(w)) = 1$;

    par les Faits 9.4.6 et 9.4.5 et par $\multimap$ E, on a $\Gamma^v_v + \Gamma^r_r \vdash t : \alpha$; d'où on peut poser $\Gamma^t = \Gamma^v_v + \Gamma^r_r$;
- $t = \lambda x.u$, $t = !u$ ou $t = \S u$: c'est direct ;
- $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$, $u \in \mathcal{WT}$ et $v \in \mathcal{TT}$: par hypothèse d'induction, il existe $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$ et $\Gamma^v, x : [b]_! \in C_{X,Y\cup\{x\},Z}$ tels que :

  (i) $\Gamma^v, x : [b]_! \vdash_\cap v : \alpha$;

  (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^v) \cup \{x\}$, si $\mathrm{FO}(w, v) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^v(w)) = 1$;

  de nouveau, par hypothèse d'induction, il existe $\Gamma^u \in C_{X,Y,Z}$ tel que :

  (i) $\Gamma^u \vdash_\cap u : b$;

  (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^u)$, si $\mathrm{FO}(w, u) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^u(w)) = 1$;

  par les Faits 9.4.6 et 9.4.5 et par !E, on a $\Gamma^u_u + \Gamma^v_v \vdash t : \alpha$; d'où on peut poser $\Gamma^t = \Gamma^u_u + \Gamma^v_v$;
- $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v$, $u \in \mathcal{WT}$ et $v \in \mathcal{TT}$: par hypothèse d'induction, il existe $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$ et $\Gamma^v, x : [\{\beta\}]_\S \in C_{X,Y,Z\cup\{x\}}$ tels que :

  (i) $\Gamma^v, x : [\{\beta\}]_\S \vdash_\cap v : \alpha$;

  (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^v)$, si $\mathrm{FO}(w, v) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^v(w)) = 1$;

  de nouveau par hypothèse d'induction, il existe $\Gamma^u \in C_{X,Y,Z}$ tel que :

  (i) $\Gamma^u \vdash_\cap u : \S\{\beta\}$;

  (ii) et pour tout $w \in \mathrm{dom}(\Gamma^u)$, si $\mathrm{FO}(w, u) \leq 1$, alors $\mathrm{Card}(\Gamma^u(w)) = 1$;

  par les Fait 9.4.6 et 9.4.5 et par §E, on a $\Gamma^u_u + \Gamma^v_v \vdash t : \alpha$; d'où on peut poser $\Gamma^t = \Gamma^u_u + \Gamma^v_v$.

□

Lemme 9.4.14. *Pour tous* $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$, *pour tous termes* u *et* v *tels que* $v \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, *pour tous contextes* Γ *tels que* $x \notin dom(\Gamma)$, *si* $\Gamma \vdash_\cap v[u/x] : \alpha$, *alors :*

(i) *si* $x \in X$ *et* u *est typable dans le contexte* Γ, *alors il existe* $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\cap)$ *tel que* $\Gamma, x : a \vdash_\cap v : \alpha$ *et* $\Gamma \vdash_\cap u : a$;

(ii) *si* $x \in Y$ *et* $!u$ *est typable dans le contexte* Γ, *alors il existe* $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\cap)$ *tel que* $\Gamma, x : [a]_! \vdash_\cap v : \alpha$ *et* $\Gamma \vdash_\cap !u : a$;

(iii) *si* $x \in Z$, $FO(x, v) \leq 1$ *et* $\S u$ *est typable dans le contexte* Γ, *alors il existe* $\gamma \in \mathcal{F}_\cap$ *tel que* $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap v : \alpha$ *et* $\Gamma \vdash_\cap \S u : \S\{\gamma\}$.

Démonstration. Par induction sur v :

- si v est une variable, elors on a les cas suivants :
  - $v = x$: $x \in X$ et l'on peut poser $\gamma = \alpha$;
  - $v \neq x$: dans tous les cas, il suffid d'appliquer le Fait 9.4.6 ;
- si $v = (v_2)v_1$, alors on a $\Gamma \vdash_\cap v_2[u/x] : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma \vdash_\cap v_1[u/x] : \beta$:
  (i) par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : a_2 \vdash_\cap v_2 : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma \vdash_\cap u : a_2$; de nouveau, par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : a_1 \vdash_\cap v_1 : \beta$ et $\Gamma \vdash_\cap u : a_1$; par le Fait 9.4.5, on a $\Gamma, x : a_1 \cup a_2 \vdash_\cap v_2 : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma, x : a_1 \cup a_2 \vdash_\cap v_1 : \beta$; par $\multimap$ E, on a $\Gamma, x : a_1 \cup a_2 \vdash_\cap v : \alpha$;

  (ii) par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : [a_2]_! \vdash_\cap v_2 : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma \vdash_\cap !u : a_2$; de nouveau, par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : [a_1]_! \vdash_\cap v_1 : \beta$ and $\Gamma \vdash_\cap !u : a_1$; par le Fait 9.4.5, on a $\Gamma, x : [a_1 \cup a_2]_! \vdash_\cap v_2 : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma, x : [a_1 \cup a_2]_! \vdash_\cap v_1 : \beta$; par $\multimap$ E, we have $\Gamma, x : [a_1 \cup a_2]_! \vdash_\cap v : \alpha$;

  (iii) on a les cas suivants :
  - $v_2[u/x] = v_2$: par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap v_1 : \beta$ et $\Gamma \vdash_\cap \S u : \S\{\gamma\}$; par le Fait 9.4.5, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap v_2 : (\beta \multimap \alpha)$; par $\multimap$ E, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap v : \alpha$;
  - $v_2[u/x] \neq v_2$: $FO(x, v) \leq 1$, donc on a $v_1[u/x] = v_1$; par hypothèse d'induction, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash v_2 : (\beta \multimap \alpha)$ et $\Gamma \vdash_\cap \S u : \S\{\gamma\}$; par le Fait 9.4.5, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap v_1 : \beta$; par $\multimap$ E, on a $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\cap \alpha$;
- si $v = !v_1$, alors :
  - dans les cas *(i)* et *(iii)*, il suffit d'appliquer le Fait 9.4.5 ;
  - dans le cas *(ii)*, appliquer le cas *(i)* de l'hypothèse d'induction ;
- les autres cas sont similaires.

□

Proposition 9.4.15. *Soient $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$. Soit $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ un terme raisonnable tel que pour tout $z \in Z$, $FO(z, t) \leq 1$. Pour tout $\Gamma \in C_{X,Y,Z}$, pour tout terme t', si*

(i) $t \longrightarrow t'$,

(ii) $\Gamma \vdash_\cap t' : \alpha$

(iii) et pour tout $w \in dom(\Gamma)$ tel que $FO(w, t') \leq 1$, $Card(\Gamma(w)) = 1$,

alors il existe $\Gamma' \in C_{X,Y,Z}$ tel que :

(i) $\Gamma \leq \Gamma'$ *;*

(ii) $\Gamma' \vdash_\cap t : \alpha$ *;*

(iii) et pour tout $w \in dom(\Gamma')$ tel que $FO(w, t) \leq 1$, $Card(\Gamma'(w)) = 1$.

Démonstration. Par induction bien-fondée sur $(N(t), \text{taille}(t))$.

Si t est normal, alors il n'y a rien à faire. Sinon, si $t' \neq t$, alors il existe un terme t_1 tel que $t \longrightarrow_0 t_1$ et $t_1 \longrightarrow t'$. t_1 esr un terme raisonnable, d'où, par hypothèse d'induction, il existe $\Gamma_1 \in C_{X,Y,Z}$ tel que $\Gamma \leq \Gamma_1$, $\Gamma_1 \vdash_\cap t_1 : \alpha$ et pour tout $w \in \text{dom}(\Gamma_1)$ tel que $\text{FO}(w, t) \leq 1$, $\text{Card}(\Gamma_1(w)) = 1$; on a les cas suivants :

a) $t = (v)u$, $t_1 = (v_1)u$ et $v \longrightarrow_0 v_1$: appliquer l'hypothèse d'induction ;

b) $t = (v)u$, $t_1 = (v)u_1$ et $u \longrightarrow_0 u_1$: appliquer l'hypothèse d'induction ;

c) $t = (\lambda x.v)u$ et $t_1 = v[u/x]$: appliquer le Lemme 9.4.13, l'hypothèse d'induction et le Lemme 9.4.14 (i) ;

d) t = (let u_1 be $\dagger x_1$ in v_1)u, t_1 = let u_1 be $\dagger x_1$ in $(v_1)u$ et $x_1 \notin FV(u)$: on a $\Gamma_1 \vdash_\cap t : \alpha$;

e) $t = \lambda x.u$, $t_1 = \lambda x.u_1$ et $u \longrightarrow_0 u_1$: appliquer l'hypothèse d'induction ;

f) $t = \dagger u$, $t_1 = \dagger u_1$ et $u \longrightarrow_0 u_1$: appliquer l'hypothèse d'induction ;

g) t = let u be $\dagger x$ in v, t_1 = let u_1 be $\dagger x$ in v and $u \longrightarrow_0 u_1$: appliquer l'hypothèse d'induction ;

h) t = let $!u$ be $!x$ in v, $t_1 = v[u/x]$: appliquer l'hypothèse d'induction et le Lemme 9.4.14 (ii) ;

i) t = let $\S u$ be $\S x$ in v, $t_1 = v[u/x]$: appliquer l'hypothèse d'induction et le Lemme 9.4.14 (iii) ;

j) t = let $!u$ be $!x$ in v, t_1 = let $!u$ be $!x$ in v_1, $v \longrightarrow_0 v_1$ et $!u$ est normal : on se ramène au cas h) : appliquer Church-Rosser, la Proposition 9.4.9 et l'hypothèe d'induction ;

k) t = let $\S u$ be $\S x$ in v, t_1 = let $\S u$ be $\S x$ in v_1, $v \longrightarrow_0 v_1$ et $\S u$ est normal : on se ramène au cas i) : appliquer Church-Rosser, la Proposition 9.4.9 et l'hypothèse d'induction ;

l) t = let u be $\dagger x$ in v, t_1 = let u be $\dagger x$ in v_1, $v \longrightarrow_0 v_1$ et $u \in \mathcal{WT}$: appliquer l'hypothèse d'induction et le Lemme 9.4.13 ;

m) t = let u be $\dagger x$ in v, t_1 = let u be $\dagger x$ in v_1, $v \longrightarrow_0 v_1$ et u n'est pas normal : on se ramène au cas g) : appliquer Church-Rosser, la Proposition 9.4.9 et l'hypothèse d'induction ;

n) t = let let u_1 be $\dagger_1 x_1$ in v_1 be $\dagger x$ in v, t_1 = let u_1 be $\dagger_1 x_1$ in let v_1 be $\dagger x$ in v et $x_1 \notin FV(v)$: on a $\Gamma_1 \vdash_\cap t : \alpha$.

□

Corollaire 9.4.16. *Tout terme raisonnable est typable.*

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$ un terme raisonnable. D'abord, remarquer que $t \in \mathcal{T}_{X,Y\cup Z,\emptyset}$. Maintenant, il existe un vrai terme $t' \in \mathcal{T}_{X,Y\cup Z,\emptyset}$ tel que $t \longrightarrow t'$. Appliquer la Proposition 9.4.13 et le Lemme 9.4.15. □

Théorème 9.4.17. *Un pseudo-terme est typable si, et seulement si, c'est un terme raisonnable.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 9.4.12 et du Corollaire 9.4.16. □

9.4.4 Le gommage d'un terme raisonnable est fortement normalisable

Dans le but de prouver que le gommage d'un terme raisonnable est fortement normalisable, on rappelle ce qu'est le Système $\mathcal{D}$ (voir [35] pour une présentation plus détaillée) :

Définition 9.4.18. *L'ensemble $\mathcal{F}_\mathcal{D}$ des types du Système $\mathcal{D}$ est défini par la grammaire suivante :*
$\mathcal{F}_\mathcal{D} ::= \mathcal{P} \mid (\mathcal{F}_\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_\mathcal{D}) \mid (\mathcal{F}_\mathcal{D} \wedge \mathcal{F}_\mathcal{D})$.

Définition 9.4.19. *Les règles d'assignation de types sont celles donées dans la Figure 9.5.*

On peut prouver les fait, théorème et proposition suivants :

Fait 9.4.20. *Si $\Gamma \vdash_\mathcal{D} t : \alpha$, alors $\Gamma, \Delta \vdash_\mathcal{D} t : \alpha$.*

Théorème 9.4.21. *Tout lambda-terme typable dans le Système $\mathcal{D}$ est fortement normalisable.*

Proposition 9.4.22. *Soient Γ un contexte et $x_1, \ldots, x_k$ des variables non déclarées dans Γ. Si $\Gamma, x_1 : A_1, \ldots, x_k : A_k \vdash_\mathcal{D} u : B$ et pour tout i tel que $1 \leq i \leq k$ et x_i est libre dans u, $\Gamma \vdash_\mathcal{D} t_i : A_i$, alors $\Gamma \vdash_\mathcal{D} u[t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k] : B$.*

$$\frac{}{x : A, \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} x : A}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} v : (B \multimap A) \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} u : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} (v)u : A} \to \mathrm{E} \qquad \frac{x : B, \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} u : A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \lambda x.u : (B \to A)} \to \mathrm{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : (A \wedge B)}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : A} \wedge_1\mathrm{E} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : (A \wedge B)}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : B} \wedge_2\mathrm{E} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : A \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : B}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} t : (A \wedge B)} \wedge I$$

FIG. 9.5 – Système $\mathcal{D}$

Maintenant, on veut définir le gommage d'un type de **LI** comme étant un type du Système $\mathcal{D}$. Cette traduction est quelque peu arbitraire du fait que l'on doit transformer un ensemble fini non vide $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de types de **LI** en l'intersection des traductions de chacun des types : les types $A \wedge B$ et $B \wedge A$ sont fondamentalement les mêmes, mais formellement différents. La traduction doit "choisir" un ordre particulier. Pour cela, on considère une fonction $\Box_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ vers $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}{}^{(\mathbb{N})}$ telle que

$$\Box_{\mathcal{D}}(\{A_1, \ldots, A_n\}) = (A_1, \ldots, A_n).$$

Définition 9.4.23. *Pour tout $n \geq 1$, pour tout $\mathfrak{s} \in \mathcal{F}^n_{\mathcal{D}}$, $\bigwedge \mathfrak{s}$ est défini par induction sur n :*
- *si $\mathfrak{s} = (\alpha)$, alors $\bigwedge \mathfrak{s} = \alpha$;*
- $\bigwedge(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = (\bigwedge(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge \alpha_{n+1})$.

- si $\alpha \in \mathcal{P}$, alors $\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha) = \alpha$;
- si $\alpha = (\beta \multimap \gamma)$, alors $\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha) = (\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\beta) \to \mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\gamma))$;
- si $\alpha = a$, alors $\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha) = \bigwedge \Box_{\mathcal{D}}\{\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\beta)\ ;\ \beta \in a\}$;
- si $\alpha = \S\{\gamma\}$, alors $\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha) = \mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\gamma)$.

Pour tout $[\alpha]_\dagger \in \dagger - \mathcal{DF}_\cap$, $\mathrm{gommage}_{\mathcal{DF}_\cap}([\alpha]_\dagger) = \mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha)$.

Pour tout contexte Γ, $\mathrm{gommage_c}(\Gamma)$ est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ definie comme suit : le domaine est le même que celui de Γ et pour tout $x \in \mathrm{dom}(\Gamma)$, on a les cas suivants :
- si $\Gamma(x) \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\cap)$, alors $\mathrm{gommage_c}(\Gamma)(x) = \bigwedge \Box_{\mathcal{D}}\{\mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha)\ ;\ \alpha \in \Gamma(x)\}$;
- si $\Gamma(x) \in \mathcal{P}^*_f(\dagger - \mathcal{DF}_\cap)$, alors $\mathrm{gommage_c}(\Gamma)(x) = \bigwedge \Box_{\mathcal{D}}\{\mathrm{gommage}_{\mathcal{DF}_\cap}(\alpha)\ ;\ \alpha \in \Gamma(x)\}$.

Fait 9.4.24. *Si $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \bigwedge(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_n$.*

Proposition 9.4.25. *Si $\Gamma \vdash_{\mathbf{LI}} t : \alpha$ est dérivable, alors $\mathrm{gommage}_c(\Gamma) \vdash_{\mathcal{D}} \mathrm{gommage}(t) : \mathrm{gommage}_{\mathcal{F}_\cap}(\alpha)$ est dérivable.*

Démonstration. Par induction sur t :
- si t est une variable, alors appliquer le Fait 9.4.24 ;
- si $t = (v)u$ ou $t = \lambda x.u$, alors c'est direct ;
- si $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v$, alors appliquer le Fait 9.4.24 et la Proposition 9.4.22 ;
- si $t = \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ \S x\ \mathsf{in}\ v$, alors appliquer la Proposition 9.4.22 ;
- si $t = \dagger u$, alors appliquer le Fait 9.4.20.

□

Théorème 9.4.26. *Le gommage d'un terme raisonnable est fortement normalisable.*

Démonstration. C'est une conséquence des Corollaires 9.4.16 et 9.4.25 et du Théorème 9.4.21. □

$$\frac{\alpha \in a}{x : a, \Gamma \vdash_\Omega x : \alpha}\ \text{Ax} \qquad \frac{t \text{ est un terme}}{\Gamma \vdash_\Omega t : \Omega}\ \Omega\text{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\Omega v : (\beta \multimap \alpha) \qquad \Gamma \vdash_\Omega u : \beta}{\Gamma \vdash_\Omega (v)u : \alpha} \multimap \text{E} \qquad \frac{x : \{\beta\}, \Gamma \vdash_\Omega u : \alpha \quad \text{FO}(x,u) \leq 1}{\Gamma \vdash_\Omega \lambda x.u : (\beta \multimap \alpha)} \multimap \text{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\Omega u : a \qquad x : [a]_!, \Gamma \vdash_\Omega v : \alpha}{\Gamma \vdash_\Omega \text{let } u \text{ be } !x \text{ in } v : \alpha}\ !\text{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash_\Omega u : \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash_\Omega u : \alpha_n \ n \geq 1 \ \text{FO}(u) \leq 1}{[\Gamma]_!, \Delta \vdash_\Omega !u : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}\ !\text{I}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_\Omega u : \S\beta \qquad x : [\{\beta\}]_\S, \Gamma \vdash_\Omega v : \alpha \quad \text{FO}(x,v) \leq 1}{\Gamma \vdash_\Omega \text{let } u \text{ be } \S x \text{ in } v : \alpha}\ \S\text{E} \qquad \frac{\Gamma, \Sigma \vdash_\Omega u : \beta}{[\Gamma]_!, [\Sigma]_\S, \Delta \vdash_\Omega \S u : \S\beta}\ \S\text{I}$$

où $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_\Omega$ and $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega)$

FIG. 9.6 – Le Système d'assignation de types relâché avec intersection légère (**RLI**)

9.5 Le système relâché avec intersection légère (RLI)

LI a permis de donner une condition suffisante et nécessaire pour qu'un terme soit raisonnable. Maintenant, on modifie légèrement ce système pour obtenir un nouveau système qui type exactement les termes sûrs.

Définition 9.5.1. *L'ensemble $\mathcal{F}_\Omega$ des types est défini par la grammaire suivante :* $\mathcal{F}_\Omega ::= \mathcal{P} \mid (\mathcal{F}_\Omega \multimap \mathcal{F}_\Omega) \mid \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega) \mid \S\mathcal{F}_\Omega \mid \Omega$.
L'ensemble $!\text{-}\mathcal{DF}_\Omega$ *est* $\{[\alpha]_!\ ;\ \alpha \in \mathcal{F}_\Omega\}$. *L'ensemble* $\S\text{-}\mathcal{DF}_\Omega$ *est* $\{[\alpha]_\S\ ;\ \alpha \in \mathcal{F}_\Omega\}$.
Un contexte est une application d'un sous-ensemble fini de $\mathcal{V}$ *vers* $\mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega) \cup \mathcal{P}^*_f(!\text{-}\mathcal{DF}_\Omega) \cup \mathcal{P}^*_f(\S\text{-}\mathcal{DF}_\Omega)$.

Pour tout $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega)$, $[a]_\dagger$ est une notation pour $\{[\alpha]_\dagger\ ;\ \alpha \in a\}$.

Définition 9.5.2. *Les règles d'assignation de types sont celles données dans la Figure 9.6.*

L'unique différence entre les règles d'assignation de types de **LI** et celles de **RLI** est la règle ΩI : tout terme est typable de type Ω. Remarquer que si l'on veut appliquer cette règle avec un pseudo-terme, on doit d'abord vérifier que c'est un terme ; ceci n'est pas un problème, car, comme on l'a rappelé dans la Section 9.1, il existe un algorithme quadratique qui le fait.

Mais attention avec la définition de *typable*.

Définition 9.5.3. *Pour tout séquent* $x_1 : a_1, \ldots, x_{k_1} : a_{k_1}, y_1 : [b_1]_{\dagger_1}, \ldots, y_{k_2} : [b_{k_2}]_{\dagger_{k_2}} \vdash t : \alpha$, *types*$(x_1 : a_1, \ldots, x_{k_1} : a_{k_1}, y_1 : [b_1]_{\dagger_1}, \ldots, y_{k_2} : [b_{k_2}]_{\dagger_{k_2}} \vdash t : \alpha)$ *est une notation pour* $(\bigcup\{a_i\ ;\ 1 \leq i \leq k_1\}) \cup (\bigcup\{b_i\ ;\ 1 \leq i \leq k_2\}) \cup \{\alpha\}$.

Définition 9.5.4. *Un terme t est dit* typable *s'il existe un séquent* $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$ *tel qu'il existe une dérivation de* $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$ *et types*$(\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha) \subseteq \mathcal{F}_\cap$.

Autrement dit, Ω n'apparaît ni dans Γ ni dans α.

9.5.1 "Subject Reduction"

Proposition 9.5.5. *Pour tout terme t, si* $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$ *et* $t \longrightarrow t'$, *alors* $\Gamma \vdash_\Omega t' : \alpha$.

La preuve est similaire à celle de la Proposition 9.4.9.

9.5.2 Propriété de la sous-formule

Définition 9.5.6. *Pour tout $\alpha \in \mathcal{F}_\Omega$, on définit, par induction sur α, l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha)$ des sous-formules de α :*

- *si $\alpha \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{S}(\alpha) = \{\alpha\}$;*
- *si $\alpha = (\beta \multimap \gamma)$, alors $\mathcal{S}(\alpha) = \mathcal{S}(\beta) \cup \mathcal{S}(\gamma) \cup \{\alpha\}$;*
- *si $\alpha = \dagger a$, alors $\mathcal{S}(\alpha) = (\bigcup\{\mathcal{S}(\mu)\ ;\ \mu \in a\}) \cup \{\alpha\}$;*
- *si $\alpha = \Omega$, alors $\mathcal{S}(\alpha) = \{\Omega\}$.*

Remarque 9.5.7. *Si $\alpha \in \mathcal{F}_\cap$, alors $\mathcal{S}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}_\cap$.*

Proposition 9.5.8. *Soit t un terme normal et soit π la dérivation de $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$. Alors pour tout jugement Θ de π, pour tout $\mu \in types(\Theta)$, il existe $\beta \in types(\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha)$ tel que $\mu \in \mathcal{S}(\beta)$; de plus, si t s'écrit $(v)u$, alors $\alpha \in \mathcal{S}(\Gamma)$.*

Démonstration. Par induction sur t. □

Corollaire 9.5.9. *Tout terme normal typable dans* **RLI** *est typable dans* **LI**.

9.5.3 Les pseudo-termes typables sont des termes sûrs

Proposition 9.5.10. *Si $x_1 : a_1, \ldots, x_{k_1} : a_{k_1}, y_1 : [b_1]_!, \ldots, y_{k_2} : [b_{k_2}]_!, z_1 : [c_1]_\S, \ldots, z_{k_3} : [c_{k_3}]_\S \vdash t : \alpha$ est dérivable, alors $t \in \mathcal{T}_{\{x_1,\ldots,x_{k_1}\},\{y_1,\ldots,y_{k_2}\},\{z_1,\ldots,z_{k_3}\}}$.*

La preuve est similaire à celle de la Proposition 9.4.10.

Proposition 9.5.11. *Tout pseudo-terme typable est un terme sûr.*

Démonstration. Soit t un pseudo-terme typable. Par la Proposition 9.5.10, t est un terme. Par le Théorème 9.1.5, t se réduit en un terme normal t'. Par la Proposition 9.5.5, t' est un terme typable. Maintenant, par le Corollaire 9.5.9, t' est typable dans **LI**. D'où, par le Lemme 9.4.11, t' est un vrai terme. □

9.5.4 Les termes sûrs sont des termes typables

Lemme 9.5.12. *Pour tous $X, Y, Z \subseteq \mathcal{V}$, pour tous termes u et v tels que $v \in \mathcal{T}_{X,Y,Z}$, pour tout contexte Γ tel que $x \notin dom(\Gamma)$, si $\Gamma \vdash_\Omega v[u/x] : \alpha$, alors :*

(i) si $x \in X$, alors il existe $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega)$ tel que $\Gamma, x : a \vdash_\Omega v : \alpha$ et $\Gamma \vdash_\Omega u : a$;

(ii) si $x \in Y$, alors il existe $a \in \mathcal{P}^*_f(\mathcal{F}_\Omega)$ tel que $\Gamma, x : [a]_! \vdash_\Omega v : \alpha$ et $\Gamma \vdash_\Omega\ !u : a$;

(iii) si $x \in Z$ et $FO(x, v) \leq 1$, alors il existe $\gamma \in \mathcal{F}_\Omega$ tel que $\Gamma, x : [\{\gamma\}]_\S \vdash_\Omega v : \alpha$ et $\Gamma \vdash_\Omega \S u : \S\{\gamma\}$.

Démonstration. On peut supposer que l'on a $\alpha \neq \Omega$. Maintenant, on prouve le lemme par induction sur v :

- si v est une variable, alors on a les cas suivants :
  - $v = x : x \in X$ et l'on peut poser $\gamma = \alpha$;
  - $v \neq x$:
    (i) puisque $\Gamma \vdash_\Omega v : \alpha$, par le Fait 9.4.6, $\Gamma, x : \{\Omega\} \vdash_\Omega v : \alpha$; et l'on a $\Gamma \vdash_\Omega u : \Omega$;
    (ii) puisque $\Gamma \vdash_\Omega v : \alpha$, par le Fait 9.4.6, $\Gamma, x : [\{\Omega\}]_! \vdash_\Omega v : \alpha$; et l'on a $\Gamma \vdash_\Omega\ !u : \{\Omega\}$;
    (iii) puisque $\Gamma \vdash_\Omega v : \alpha$, par le Fait 9.4.6, $\Gamma, x : [\{\Omega\}]_\S \vdash_\Omega v : \alpha$; et l'on a $\Gamma \vdash_\Omega \S u : \S\{\Omega\}$;
- les autres cas sont similaires à la preuve du Lemme 9.4.14.

□

Proposition 9.5.13. *Pour tous termes t et t' tels que $t \longrightarrow_0 t'$, si $\Gamma \vdash_\Omega t' : \alpha$, alors $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$.*

Démonstration. On peut supposer que $\alpha \neq \Omega$. Maintenant, la proposition est prouvée par induction sur t : les cas critiques sont les suivants :

– $t = (\lambda x.v_1)u$ et $t' = v_1[u/x]$: appliquer le Lemme 9.5.12 (i) ;
– $t = \text{let } !u_1 \text{ be } !x \text{ in } v$ et $t' = v[u_1/x]$: appliquer le Lemme 9.5.12 (ii) ;
– $t = \text{let } \S u_1 \text{ be } \S x \text{ in } v$ et $t' = v[u_1/x]$: appliquer le Lemme 9.5.12 (iii).

□

Théorème 9.5.14. *Pour tous termes t et t' tels que $t \longrightarrow t'$, si $\Gamma \vdash_\Omega t' : \alpha$, alors $\Gamma \vdash_\Omega t : \alpha$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 9.5.13. □

Théorème 9.5.15. *Tout pseudo-terme est typable si, et seulement si, c'est un terme sûr.*

Démonstration. Soit t un terme sûr : il se réduit en un vrai terme, lequel, par le Corollaire 9.4.16, est typable ; d'où, par le Théorème 9.5.14, t est typable. La réciproque est la Proposition 9.5.11. □

9.6 Une sémantique du second ordre

On peut déduire du système **RLI** une sémantique dénotationnelle du lambda calcul affine léger non typé et du second ordre : pour l'essentiel, on va interpréter un terme t de type A dans $\mathbf{ILAL_N}$ par l'ensemble des types α de t dans **RLI** et on va interpréter les types de $\mathbf{ILAL_N}$ par un ensemble d'ensemble de types de **RLI** de telle manière que le $\forall$ soit interprété par une intersection.

Soit A un ensemble non vide ne contenant pas de couples et soient $\omega, * \notin A$ tels que ni ω ni $*$ ne sont des couples. On définit D_n par induction sur n :

– $D_0 = A \cup \{\omega\}$;
– $D_{n+1} = D_0 \cup (D_n \times D_n) \cup \mathcal{P}^*_f(D_n) \cup (\{*\} \times D_n)$.

On pose $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ et $\mathcal{D} = \mathcal{P}(D)$. L'interprétation d'un terme léger sera un élément de $\mathcal{D}$.

On appelle environnement une application de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \times \{-1\}) \cup (\mathcal{D} \times \{-2\})$. Si ρ est un environnement, $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ et $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \times \{-1\}) \cup (\mathcal{D} \times \{-2\})$, alors $\rho[x_1 := d_1, \ldots, x_n := d_n]$ est l'environnement ρ' défini par

$$\rho'(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{si } x \notin \mathcal{V} \\ d_i & \text{si } x = x_i. \end{cases}$$

Si $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{V}$ et $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \times \{-1\}) \cup (\mathcal{D} \times \{-2\})$, alors $[x_1 := d_1, \ldots, x_n := d_n]$ est l'environnement ρ défini par

$$\rho(x) = \begin{cases} d_i & \text{si } x = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout terme léger t, on définit, par induction sur t, $[\![t]\!]_\rho \in \mathcal{D}$ avec ρ un environnement :

– $[\![x]\!]_\rho = \begin{cases} \rho(x) \cup \{\omega\} & \text{si } \rho(x) \in \mathcal{D} ; \\ \{\omega\} & \text{sinon.} \end{cases}$;
– $[\![(v)u]\!]_\rho = \{\alpha \ ; \ \exists \beta \in [\![u]\!]_\rho \ (\beta, \alpha) \in [\![v]\!]_\rho\}$;
– $[\![\lambda x.u]\!]_\rho = \{(\beta, \alpha) \ ; \ \beta \in D \text{ et } \alpha \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\}$;
– $[\![\text{let } u \text{ be } !x \text{ in } v]\!]_\rho = \bigcup_{a \in [\![u]\!]_\rho} [\![v]\!]_{\rho[x:=(a,-1)]}$;

– $[\![!u]\!]_{[x_1:=a_1,\dots,x_m:=a_m,y_1:=(b_1,-1),\dots,y_n:=(b_n,-1),z_1:=(c_1,-2),\dots,z_p:=(c_p,-2)]} = \mathcal{P}^*_f([\![u]\!]_{[y_1:=b_1,\dots,y_n:=b_n]})$, où $a_1,\dots,a_m \in \mathcal{D}$;
– $[\![\text{let } u \text{ be } \S x \text{ in } v]\!]_\rho = \bigcup_{(*,\beta)\in[\![u]\!]_\rho}[\![v]\!]_{\rho[x:=(\{\beta\},-2)]}$;
–

$$\begin{aligned} & [\![\S u]\!]_{[x_1:=a_1,\dots,x_m:=a_m,y_1:=(b_1,-1),\dots,y_n:=(b_n,-1),z_1:=(c_1,-2),\dots,z_k:=(c_k,-2)]} \\ = \ & \{*\}\times[\![u]\!]_{[y_1:=b_1,\dots,y_n:=b_n,z_1:=c_1,\dots,z_k:=c_k]} \ , \\ & \text{où } a_1,\dots,a_m \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Fait 9.6.1. *Pour tout terme léger u, pour tout environnement ρ, pour tout $x \in \mathcal{V}$, tous $a, b \in \mathcal{D}$, si $FO(x,u) = 0$, alors $[\![u]\!]_{\rho[x:=a]} = [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}$.*

Démonstration. Par induction sur u. □

Lemme 9.6.2. *Pour tout terme léger t tel que $FO(x,t) = 1$, pour tout environnement ρ, pour tout $b \in \mathcal{D}$, si $b \neq \emptyset$, alors on a $[\![t]\!]_{\rho[x:=b]} = \bigcup_{\beta\in b}[\![t]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}$.*

Démonstration. Par induction sur u.
– si $t \in \mathcal{V}$, alors il y a deux cas :
  – si $t = x$, alors $[\![t]\!]_{\rho[x:=b]} = b \cup \{\omega\} = \bigcup_{\beta\in b}(\{\beta\}\cup\{\omega\}) = \bigcup_{\beta\in b}[\![t]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}$;
  – sinon, on applique le Fait 9.6.1.
– si $t = \dagger u$, alors c'est par définition (il n'y a pas besoin d'utiliser l'hypothèse d'induction) ;
– Si $t = (v)u$, alors il y a deux cas :
  – $FO(x,v) = 1$ et $FO(x,u) = 0$:

$$\begin{aligned} [\![(v)u]\!]_{\rho[x:=b]} &= \{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}(\beta_0,\alpha) \in \bigcup_{\beta\in b}[\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\} \\ &\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}\{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}\ (\beta_0,\alpha) \in [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}\{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\ (\beta_0,\alpha) \in [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\} \\ &\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}[\![(v)u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \ . \end{aligned}$$

  – $FO(x,v) = 0$ et $FO(x,u) = 1$:

$$\begin{aligned} [\![(v)u]\!]_{\rho[x:=b]} &= \{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in \bigcup_{\beta\in b}[\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}(\beta_0,\alpha) \in [\![v]\!]_{\rho[x:=b]}\} \\ &\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}\{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\ (\beta_0,\alpha) \in [\![v]\!]_{\rho[x:=b]}\} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}\{\alpha\ ;\ \exists\beta_0 \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\ (\beta_0,\alpha) \in [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}\} \\ &\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\ &= \bigcup_{\beta\in b}[\![(v)u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \ . \end{aligned}$$

– si $t = \lambda y.u$, alors on a

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]_{\rho[x:=b]} &= \{(\beta_0, \alpha)\ ;\ \beta_0 \in D \text{ et } \alpha \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b, y:=\{\beta_0\}]}\} \\
&= \{(\beta_0, \alpha)\ ;\ \beta_0 \in D \text{ et } \alpha \in \bigcup_{\beta \in b} [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=\{\beta_0\}]}\} \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} \{(\beta_0, \alpha)\ ;\ \beta_0 \in D \text{ et } \alpha \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=\{\beta_0\}]}\} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \quad .
\end{aligned}$$

– si $t = \text{let } u \text{ be } !y \text{ in } v$, alors il y a deux cas :
  – $FO(x, u) = 1$ et $FO(x, v) = 0$:

$$\begin{aligned}
[\![\text{let } u \text{ be } !y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=b]} &= \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b, y:=(a,-1)]} \\
&= \bigcup_{a \in \bigcup_{\beta \in b} [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b, y:=(a,-1)]} \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b, y:=(a,-1)]} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=(a,-1)]} \\
&\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} [\![\text{let } u \text{ be } !y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \quad .
\end{aligned}$$

  – $FO(x, u) = 0$ et $FO(x, v) = 1$:

$$\begin{aligned}
[\![\text{let } u \text{ be } !y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=b]} &= \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b, y:=(a,-1)]} \\
&= \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} \bigcup_{\beta \in b} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=(a,-1)]} \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=(a,-1)]} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} \bigcup_{a \in [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}, y:=(a,-1)]} \\
&\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\
&= \bigcup_{\beta \in b} [\![\text{let } u \text{ be } !y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \quad .
\end{aligned}$$

– si $t = \text{let } u \text{ be } \S y \text{ in } v$, alors il y a deux cas :
  – $FO(y, u) = 1$ et $FO(y, v) = 0$:

$$[\![\text{let } u \text{ be } \S y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=b]} = \bigcup_{(*, \{\beta_0\}) \in [\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b, y:=(\{\beta_0\},-2)]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in\bigcup_{\beta\in b}[\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b,y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b,y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\},y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} [\![\text{let } u \text{ be } \S y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \ .
\end{aligned}
$$

– $FO(x, u) = 0$ et $FO(x, v) = 1$:

$$
\begin{aligned}
[\![\text{let } u \text{ be } \S y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=b]} &= \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=b,y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&= \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} \bigcup_{\beta\in b} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\},y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&\quad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=b]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\},y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} \bigcup_{(*,\{\beta_0\})\in[\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]}} [\![v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\},y:=(\{\beta_0\},-2)]} \\
&\quad \text{(par le Fait 9.6.1)} \\
&= \bigcup_{\beta\in b} [\![\text{let } u \text{ be } \S y \text{ in } v]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} \ .
\end{aligned}
$$

□

Lemme 9.6.3. *Pour tout terme léger t, pour tous $a, b \in \mathcal{D}$ tels que $a \subseteq b$, pour tout environnement ρ, on a*

– $[\![v]\!]_{\rho[x:=a]} \subseteq [\![v]\!]_{\rho[x:=b]}$;
– $[\![v]\!]_{\rho[x:=(a,-1)]} \subseteq [\![v]\!]_{\rho[x:=(b,-1)]}$;
– $[\![v]\!]_{\rho[x:=(a,-2)]} \subseteq [\![v]\!]_{\rho[x:=(b,-2)]}$.

Interprétons les types maintenant. On rappelle qu'un espace cohérent ("coherence space", voir [31]) $\mathcal{A}$ est un ensemble tel que

(i) pour tout $a \in \mathcal{A}$ et pour tout $a' \subseteq a$, on a $a' \in \mathcal{A}$;

(ii) pour tout $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, si $\forall b_1, b_2 \in \mathcal{B}\ b_1 \cup b_2 \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

On pose $\mathcal{D}^* = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{D})\ ;\ \mathcal{A}$ est un espace cohérent$\}$. Soit η une application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{D}^*$. On définit, par induction sur A, $[\![A]\!]_\eta \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$:

– si $A \in \mathcal{P}$, alors $[\![A]\!]_\eta = \eta(A)$;
– si $A = (B \multimap C)$, alors $[\![A]\!]_\eta = \{a \in \mathcal{D}\ ;\ \forall b \in [\![B]\!]_\eta\ \bigcup_{\beta\in b}\{\gamma\ ;\ (\beta, \gamma) \in a\} \in [\![C]\!]_\eta\}$;
– si $A = !C$, alors $[\![A]\!]_\eta = \{a \in \mathcal{D}\ ;\ \forall a' \in a\ a'$ est fini non vide et $\forall a', b' \in a\ a' \cup b' \in [\![C]\!]_\eta\}$;
– si $A = \forall X\ B$, alors $[\![A]\!]_\eta = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{D}^*} [\![B]\!]_{\eta[X:=\mathcal{A}]}$.

Lemme 9.6.4. *Pour tout type A, pour toute application η de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{D}^*$, $[\![A]\!]_\eta \in \mathcal{D}^*$.*

Démonstration. Par induction sur A.

On se contente de montrer (ii) pour $A = B \multimap C$.

Soit $\mathcal{B} \subseteq [\![B \multimap C]\!]_\eta$ tel que pour tous $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$, $a_1 \cup a_2 \in [\![B \multimap C]\!]_\eta$. Pour tous $a_1, a_2 \in \mathcal{B}$, on a donc

$$\forall b \in [\![B]\!]_\eta \ \bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in a_1 \cup a_2\} \in [\![C]\!]_\eta \ .$$

De plus, pour tout $b \in [\![B]\!]_\eta$, on a

$$\bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in a_1 \cup a_2\} = \bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in a_1\} \cup \bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in a_2\} \ .$$

Donc, comme, par hypothèse d'induction, $[\![C]\!]_\eta$ est un espace cohérent, pour tout $b \in [\![B]\!]_\eta$, on a

$$\bigcup_{a \in \mathcal{B}} \bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in a\} \in [\![C]\!]_\eta \ .$$

Enfin, on obtient

$$\forall b \in [\![B]\!]_\eta \ \bigcup_{\beta \in b} \{\gamma \ ; \ (\beta, \gamma) \in \bigcup \mathcal{B}\} \in [\![C]\!]_\eta \ .$$

□

Exemple 9.6.5. *On a* $[\![\forall X \ X]\!] = \emptyset$ *et* $[\![(\forall X \ X \multimap \forall X \ X)]\!] = \mathcal{D}$.

Théorème 9.6.6. *Soit*

$$x_1 : A_1, \ldots, x_m : A_m, y_1 : [B_1]_!, \ldots, y_n : [B_n]_!, z_1 : [C_1]_\S, \ldots, z_p : [C_p]_\S \vdash_{\mathbf{ILAL_N}} t : A$$

un jugement dérivable. Soit ρ *un environnement et soit* η *une application de* $\mathcal{P}$ *vers* $\mathcal{D}^*$ *telles que :*

- *pour* $1 \leq i \leq m$, $\rho(x_i) \in [\![A_i]\!]_\eta$ *;*
- *pour* $1 \leq j \leq n$, $\rho(y_j) \in \mathcal{D} \times \{-1\}$ *et si* $\rho(y_j) = (d, -1)$, *alors* $d \in [\![B_j]\!]_\eta$ *;*
- *et pour* $1 \leq k \leq p$, $\rho(z_k) \in \mathcal{D} \times \{-2\}$ *et si* $\rho(z_k) = (d, -2)$, *alors* $d \in [\![C_k]\!]_\eta$.

Alors $[\![t]\!]_\rho \in [\![A]\!]_\eta$.

Démonstration. Par induction sur la dérivation.

- Dans le cas où la dérivation se termine par $\dfrac{x : B, \Gamma \vdash u : C \quad \mathrm{FO}(x, u) \leq 1}{\Gamma \vdash \lambda x.u : (B \multimap C)} \multimap \mathrm{I}$: par le Lemme 9.6.2, pour tout $b \in [\![B]\!]_\eta$ non vide, on a $\bigcup_{\beta \in b} [\![u]\!]_{\rho[x:=\{\beta\}]} = [\![u]\!]_{\rho[x:=b]} \in [\![C]\!]_\eta$.
- Dans le cas où la dérivation se termine par $\dfrac{\Gamma \vdash u : !C \qquad x : [C]_!, \Gamma \vdash v : A}{\Gamma \vdash \mathsf{let}\ u\ \mathsf{be}\ !x\ \mathsf{in}\ v : A} !\mathrm{E}$:
  - par hypothèse d'induction, pour tout $a \in [\![u]\!]_\rho$, $[\![v]\!]_{\rho[x:=(a,-1)]} \in [\![A]\!]_\eta$;
  - par hypothèse d'induction, $[\![u]\!]_\rho \in [\![!C]\!]_\eta$ donc, pour tous $a_1, a_2 \in [\![u]\!]_\rho$, par définition de $[\![!C]\!]_\eta$, $a_1 \cup a_2 \in [\![C]\!]_\eta$ donc, par hypothèse d'induction, $[\![v]\!]_{\rho[x:=(a_1 \cup a_2,-1)]} \in [\![A]\!]_\eta$ donc, par le Lemme 9.6.3, $[\![v]\!]_{\rho[x:=(a_1,-1)]} \cup [\![v]\!]_{\rho[x:=(a_2,-1)]} \in [\![A]\!]_\eta$;

  donc, comme $[\![A]\!]_\eta$ est un espace cohérent, $\bigcup_{a \in [\![u]\!]_\rho} [\![v]\!]_{\rho[x:=(a,-1)]} \in [\![A]\!]_\eta$.

□

Ce travail exploite plusieurs idées :

- les termes non typés ont une expressivité au moins aussi forte que ceux typables au second ordre ;
- un terme est sans erreur (respectivement se réduit en un terme sans erreur) si, et seulement si, il est typable dans un système de types avec intersection sans le type universel omega (respectivement avec le type universel omega) ;

- le ! correspond à une intersection ;
- un système de types avec intersection avec omega induit une sémantique pour des termes non typés ;
- une sémantique des termes non typés induit une sémantique des termes du second ordre.

Le dernier point est d'autant plus intéressant ici que tant que l'on se restreint aux fragments propositionnels de ELL (respectivement de LLL) et de ses variantes, on n'obtient pas de résultat de complétude par rapport à l'ensemble des fonctions élémentaires (respectivement en temps polynomial). Ainsi, en ce sens, le travail de Baillot ([3]) n'était pas complet.

En exploitant ces mêmes idées, plusieurs variantes sont possibles :

- on pourrait l'appliquer à différents calculs, par exemple :
  - au lieu d'être affine, le calcul serait linéaire ;
  - au lieu d'être léger, le calcul serait élémentaire (à la manière de ELL).
- plusieurs systèmes de types avec intersection sont possibles, en particulier, on pourrait utiliser une intersection non idempotente (comme dans le Système R introduit au Chapitre 6) et/ou définir une relation de cohérence sur D.

Si on utilisait une intersection non idempotente, on pourrait alors peut-être utiliser les résultats du chapitre précédent pour démontrer des propriétés de correction de certains systèmes à complexité implicite.

Pour prendre congé

Nous ne voulons pas ici revenir sur les résultats présentés dans notre thèse, mais plutôt mettre en évidence qu'elle a fait naître de nouvelles questions susceptibles de produire de nouveaux résultats.

Tout d'abord, dans le Chapitre 3, nous avons présenté une nouvelle axiomatique d'un modèle catégorique de IMELL. Il est légitime de se demander si cette présentation ne serait pas équivalente à une autre présentation en termes d'adjonction relativement à une 2-catégorie. Plus précisément, une conjecture raisonnable et qui semble très accessible à vérifier est la suivante : notre définition serait équivalente à la donnée d'une semi-adjonction monoïdale symétrique normale entre une catégorie monoïdale symétrique fermée et une catégorie cartésienne telle que le semi-foncteur adjoint à gauche soit un foncteur.

Nous avons présenté une manière canonique de rajouter des exponentielles à un modèle des réseaux differentiels avec sommes infinies et coefficients réels positifs. D'autres moyens canoniques existent dans d'autres cadres, en particulier celui des catégories monoïdales avec trace. Quel est le rapport entre ces deux moyens ?

Dans le cas particulier du modèle relationnel des suites finies, peut-on retrouver la comonade faible par une construction alternative à celle de la formule de Taylor-Ehrhard ?

Nous avons conjecturé que l'interprétation d'une preuve dans le non-modèle relationnel des suites finies du Chapitre 7 diminuait au cours de la réduction. On peut aussi vouloir un résultat plus précis sur l'évolution de l'interprétation au cours de la réduction : l'interprétation semble invariante modulo certaines actions de groupes sur les suites finies qui sont les points de l'interprétation des exponentielles...

On a vu que la formule de Taylor-Ehrhard permet de considérer sérieusement de nouveaux candidats à être des modèles de la logique linéaire. Nous devrions sans peine pouvoir exhiber de tels modèles pour le fragment intuitionniste (penser seulement que toute algèbre de groupe est une bigèbre cocommutative...). Cependant, le cas classique est plus problématique si nous ne voulons pas nous restreindre à la catégorie des ensembles et relations : la catégorie des k-espaces vectoriels n'étant pas $*$-autonome, on est amené a devoir considérer des espaces vectoriels topologiques.

Par ailleurs, il est clair que notre définition sémantique du temps de calcul donnée au Chapitre 8 peut être étendue à d'autres modèles (ne serait-ce qu'au modèle relationnel des suites finies) : peut-on obtenir une définition sémantique très générale (catégorique) de temps de calcul ?

Ce travail pourrait certainement être adapté afin d'obtenir une relation entre les sémantiques relationnelles des réseaux et le nombre d'étapes d'élimination des coupures des réseaux selon une stratégie qui mime la réduction linéaire de tête.

Enfin, on devrait pouvoir utiliser les résultats du Chapitre 8 et les idées exploitées dans le Chapitre 9 afin d'obtenir des résultats de correction pour certains systèmes à complexité implicite (nous pensons en particulier à DLAL et à IEAL).

Annexe A

Quelques calculs

Cette annexe a pour objectif de prouver le Lemme 3.3.16.

Fait A.0.7. *Pour tout entier $q \geq 1$, on a*

$$\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes can^q) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k}$$
$$= \bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} .$$

Démonstration. Par induction sur q.

Si $q = 1$, on a

$$\begin{aligned}
& \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k} \\
= \ & \rho_{T(B_1)} \circ (id_{T(B_1)} \otimes w_{B_1}) \circ (id_{T(B_1)} \otimes id_{T(B_1)}) \circ c_{B_1} \\
= \ & id_{T(B_1)} \\
& \text{(car } (T(B_1), c_{B_1}, w_{B_1}) \text{ est un comonoïde dans } \mathcal{C}) \\
= \ & \bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} .
\end{aligned}$$

Supposons le Fait démontré pour un certain q. On a

$$\begin{aligned}
& \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} I}) \circ \sim_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), \bigotimes_{k=1}^{q} I, T(B_{q+1}), I} \\
= \ & \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), T(B_{q+1}), \bigotimes_{k=1}^{q} I} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \gamma_{\bigotimes_{k=1}^{q} I, T(B_{q+1})}) \\
& \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), \bigotimes_{k=1}^{q} I, T(B_{q+1})}^{-1} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k) \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} I} \otimes \rho_{T(B_{q+1})}) \\
& \text{(par la Remarque 1.1.5)} \\
= \ & \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), T(B_{q+1}), I} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \gamma_{I, T(B_{q+1})}) \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes (\mathrm{can}^q \otimes id_{T(B_{q+1})})) \\
& \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), \bigotimes_{k=1}^{q} I, T(B_{q+1})}^{-1} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k) \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} I} \otimes \rho_{T(B_{q+1})}) \\
& \text{(par naturalité de } \alpha \text{ et de } \gamma) \\
= \ & (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \lambda_{T(B_{q+1})}) \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes (\mathrm{can}^q \otimes id_{T(B_{q+1})})) \\
& \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k), \bigotimes_{k=1}^{q} I, T(B_{q+1})}^{-1} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k) \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} I} \otimes \rho_{T(B_{q+1})})
\end{aligned}$$

$$= (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \lambda_{T(B_{q+1})}) \circ \alpha_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k),I,T(B_{q+1})}{}^{-1} \circ ((id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$
$$\circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k) \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} I} \otimes \rho_{T(B_{q+1})})$$

(par naturalité de α)

$$= (\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ ((id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k) \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} I} \otimes \rho_{T(B_{q+1})})$$
$$= (\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q)) \otimes \rho_{T(B_{q+1})}$$

donc on a

$$\rho_{\bigotimes_{k=1} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^{q+1}) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q+1} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q+1} w_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k}$$
$$= \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \otimes \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} I}) \circ \sim_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k),\bigotimes_{k=1}^{q} I,T(B_{q+1}),I}$$
$$\circ ((\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes w_{B_{q+1}})) \circ (\sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_q)\rangle} \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes id_{T(B_{q+1})}))$$
$$\circ (\bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k} \otimes c_{B_{q+1}})$$
$$= ((\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q)) \otimes \rho_{T(B_{q+1})})$$
$$\circ ((\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes w_{B_{q+1}})) \circ (\sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_q)\rangle} \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes id_{T(B_{q+1})}))$$
$$\circ (\bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k} \otimes c_{B_{q+1}})$$
$$= (\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k})$$
$$\otimes (\rho_{T(B_{q+1})} \circ (id_{T(B_{q+1})} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ c_{B_{q+1}})$$
$$= \bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes (\rho_{T(B_{q+1})} \circ (id_{T(B_{q+1})} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ c_{B_{q+1}})$$

(par hypothèse d'induction)

$$= \bigotimes_{k=1}^{q+1} id_{T(B_k)}$$

(car $(T(B_{q+1}), c_{B_{q+1}}, w_{B_{q+1}})$ est un comonoïde dans $\mathcal{C}$).

□

Fait A.0.8. *Pour tout entier $q \geq 1$, pour toute flèche f de $T(B_{q+1})$ vers $T(B_{q+1})$, on a*

$$((\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}})) \otimes (\lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((can^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes f)))$$
$$\circ \sim_{\langle T(B_1),\dots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k}$$
$$= \bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes f \ .$$

Démonstration. On a

$$((\rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}})) \otimes (\lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((\mathrm{can}^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes f)))$$
$$\circ \sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k}$$
$$= (\rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \otimes (\lambda_{T(B_{q+1})} \circ \mathrm{can}^q)) \circ \sim_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k), \bigotimes_{k=1}^q I, I, T(B_{q+1})}$$
$$\circ((\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes (w_{B_{q+1}} \otimes f)) \circ (\sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes id_{T(B_{q+1})})) \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k}$$
$$= ((\rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q)) \otimes \lambda_{T(B_{q+1})}) \circ ((\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes (w_{B_{q+1}} \otimes f))$$
$$\circ(\sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes (id_{T(B_{q+1})} \otimes id_{T(B_{q+1})})) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k} \otimes c_{B_{q+1}})$$

(par la Remarque 1.1.4)

$$= ((\rho_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \otimes \mathrm{can}^q) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} c_{B_k})$$
$$\otimes(\lambda_{T(B_{q+1})} \circ (w_{B_{q+1}} \otimes f) \circ (id_{T(B_{q+1})} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ c_{B_{q+1}})$$
$$= \bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes f$$

(par le Fait A.0.7) .

□

Fait A.0.9. *On a*

$$T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})) \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}$$
$$= T(id_{B_{q+1}}) \circ \lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((can^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})}) \ .$$

Démonstration. On a

$$T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})) \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}$$
$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ T(w_{\bigotimes_{k=1}^q T(B_k)} \otimes id_{B_{q+1}}) \circ T(\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes id_{B_{q+1}})$$
$$\circ \mathsf{m}_{\langle T(T(B_1)),\ldots,T(T(B_q)),B_{q+1}\rangle} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} T(\delta_{B_k}) \otimes T(d_{B_{q+1}})) \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}$$

(par naturalité de m)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ T(w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes id_{B_{q+1}}) \circ T(\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes id_{B_{q+1}})$$
$$\circ \mathsf{m}_{\langle T(T(B_1)),\ldots,T(T(B_q)),B_{q+1}\rangle} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{T(B_k)} \otimes T(id_{B_{q+1}})) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes id_{T(B_k)})$$

(car $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$ est une comonade faible)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})}$$
$$\circ((T(w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ T(\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(T(B_1)),\ldots,T(T(B_q))\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{T(B_k)}) \otimes T(id_{B_{q+1}}))$$
$$\circ(\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes id_{T(B_k)})$$

(par naturalité de m)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})} \circ ((T(w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \delta_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle}) \otimes T(id_{B_{q+1}}))$$
$$\circ(\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes id_{T(B_k)})$$

(par monoïdalité de δ)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})} \circ ((T(w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \delta_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle}) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$
$$\circ(\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes id_{T(B_k)})$$

(par normalité de m)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})} \circ (\mathsf{n} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$

(car $w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}$ est un morphisme de cogèbres)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})} \circ (\mathsf{n} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ ((\mathrm{can}^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{T(B_k)} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$

(par monoïdalité de w)

$$= T(\lambda_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{I,T(B_{q+1})} \circ (\mathsf{n} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \circ ((\mathrm{can}^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$

(w_{B_k} est un morphisme de cogèbres)

$$= T(id_{B_{q+1}}) \circ \lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((\mathrm{can}^q \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})})$$

(par monoïdalité de $(T, \mathsf{m}, \mathsf{n})$).

□

Fait A.0.10. *On a*

$$T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ T(\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}$$
$$= m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}}) \ .$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
& T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ T(\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
= \; & T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q),I\rangle} \circ (T(\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)}) \otimes T(w_{B_{q+1}})) \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
& \text{(par naturalité de } \mathsf{m}) \\
= \; & T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \mathsf{m}_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k),I} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(T(B_k))} \otimes \mathsf{n}) \circ (\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes id_I) \\
& \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes w_{B_{q+1}}) \\
& \text{((}T,\delta,d\text{) est une comonade faible et } w_{B_{q+1}} \text{ est un morphisme de cogèbres)} \\
= \; & T(id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \otimes id_I) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \otimes w_{B_{q+1}}) \\
& \text{(((}T,\delta,d), \mathsf{m}, \mathsf{n}\text{) est monoïdal)} \\
= \; & T(id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)}) \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}}) \\
& \text{(par naturalité de } \rho) \\
= \; & \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}}) \\
& \text{(par normalité de } \mathsf{m}).
\end{aligned}
$$

□

Lemme (3.3.16). *Pour tout entier $q \geq 1$, on a*

$$
\begin{aligned}
& (T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}})) \\
& \otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}}))) \\
& \circ c_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
= \; & (m_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes T(id_{B_{q+1}}) \quad .
\end{aligned}
$$

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
& (T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}})) \\
& \otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}}))) \\
& \circ c_{\bigotimes_{k=1}^{q+1} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
= \; & (T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k} \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}})) \otimes T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}}))) \\
& \circ (\mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle} \otimes \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle}) \circ \sim_{\langle TTB_1,\ldots,TTB_{q+1}\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{TB_k} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \\
& \text{(car } c \text{ est monoïdale)} \\
= \; & ((T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k}) \circ T(\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle}) \\
& \otimes (T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})) \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle})) \\
& \circ \sim_{\langle TTB_1,\ldots,TTB_{q+1}\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} ((\delta_{B_k} \otimes \delta_{B_k}) \circ c_{B_k}) \\
& \text{(car } \delta_{B_k} \text{ est un morphisme de comonoïdes)} \\
= \; & ((T(\rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} TB_k}) \circ T(\bigotimes_{k=1}^{q} id_{TB_k} \otimes w_{B_{q+1}}) \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle}) \\
& \otimes (T(\lambda_{B_{q+1}} \circ ((w_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ \mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes d_{B_{q+1}})) \circ \mathsf{m}_{\langle TB_1,\ldots,TB_{q+1}\rangle})) \\
& (\bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k} \otimes \bigotimes_{k=1}^{q+1} \delta_{B_k}) \circ \sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k} \\
= \; & ((\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k} \circ \rho_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \circ (id_{\bigotimes_{k=1}^{q} T(B_k)} \otimes w_{B_{q+1}})) \\
& \otimes (T(id_{B_{q+1}}) \circ \lambda_{T(B_{q+1})} \circ ((\mathrm{can}^{q} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} w_{B_k}) \otimes id_{T(B_{q+1})}))) \\
& \circ \sim_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_{q+1})\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q+1} c_{B_k} \\
& \text{(par les Faits A.0.9 et A.0.10)} \\
= \; & ((\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes T(id_{B_{q+1}})) \circ (\bigotimes_{k=1}^{q} id_{T(B_k)} \otimes id_{T(B_{q+1})}) \\
& \text{(par le Fait A.0.8)}
\end{aligned}
$$

$$= \quad (\mathsf{m}_{\langle T(B_1),\ldots,T(B_q)\rangle} \circ \bigotimes_{k=1}^{q} \delta_{B_k}) \otimes T(id_{B_{q+1}}) \quad .$$

□

Bibliographie

[1] A. Asperti. Light affine logic. In *Proceedings of LICS'98*, pages 300–308, 1998.

[2] Andrea Asperti and Luca Roversi. Intuitionistic light affine logic. *ACM Trans. Comput. Log.*, 3(1) :137–175, 2002.

[3] Patrick Baillot. Stratified coherent spaces : a denotational semantics for light linear logic. *Theoretical Computer Science*, 318(1-2) :29–55, June 2004.

[4] Patrick Baillot and Ugo dal Lago. On light logics, uniform encodings and polynomial time. *Mathematical Structures in Computer Science*, 16 :713–733, 2006.

[5] Patrick Baillot and Virgile Mogbil. Soft lambda-calculus : a language for polynomial time computation. In *Proceedings of FOSSACS*, volume 2987 of *LNCS*, pages 27–41. Springer, 2004.

[6] Michael Barr. $*$-autonomous categories. *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 752, 1979.

[7] Michael Barr. $*$-autonomous categories and linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1 :159–178, 1991.

[8] P. N. Benton. A mixed linear and non-linear logic : Proofs, terms and models (extended abstract). In Leszek Pacholski and Jerzy Tiuryn, editors, *CSL*, volume 933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 121–135. Springer, 1994.

[9] P.N. Benton, G.M. Bierman, V.C.V. de Paiva, and J.M.E. Hyland. Term assignment for intuitionistic linear logic. Technical Report 262, Computer Laboratory, University of Cambridge, August 1992.

[10] G. M. Bierman. *On Intuitionistic Linear Logic*. PhD thesis, University of Cambridge, 1993.

[11] G. M. Bierman. What is a categorical model of intuitionistic linear logic ? In *Proceedings of Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, volume 902. Springer-Verlag, 1995.

[12] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1, Basic Category Theory*. Cambridge University Press, 1994.

[13] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2, Categories and Structures*. Cambridge University Press, 1994.

[14] Gérard Boudol, Pierre-Louis Curien, and Carolina Lavatelli. A semantics for lambda calculi with resources. *Mathematical Structures in Computer Science*, 9(4) :437–482, 1999.

[15] Nicolas Bourbaki. *Algèbre, Chapitres 1 à 3*. Hermann, 1970.

[16] M. Coppo and M. Dezani-Ciancaglini. An extension of the basic functionality theory for the lambda-calculus. *Notre Dame J. Formal Logic*, 21(4) :685–693, 1980.

[17] M. Coppo, M. Dezani-Ciancaglini, and B. Venneri. Principal type schemes and λ-calculus semantics. In J. P. Seldin and J. R. Hindley, editors, *To H. B. Curry : Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, pages 535–560. Academic Press, 1980.

[18] V. Danos and L. Régnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28 :181–203, 1989.

[19] Daniel de Carvalho. Intersection types for light affine lambda calculus. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 136 :133–152, 2005.

[20] Mariangiola Dezani-Ciancaglini, Furio Honsell, and Yoko Motohama. Compositional characterisations of λ-terms using intersection types. *Theoretical Computer Science*, 340(3) :459–496, 2005.

[21] Thomas Ehrhard. Finiteness spaces. *Mathematical Structures in Computer Science*, 15(4) :615–646, 2005.

[22] Thomas Ehrhard and Laurent Regnier. Böhm trees, Krivine's machine and the Taylor expansion of lambda-terms. In *CiE*, pages 186–197, 2006.

[23] Thomas Ehrhard et Laurent Régnier. Differential interaction nets. *Theoretical Computer Science*, 364(2) :166–195, 2006.

[24] P. Giannini and S. Ronchi della Rocca. Characterization of typings in polymorphic type discipline. In *Proceedings of LICS'88*, pages 61–70, 1988.

[25] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50 :1–102, 1987.

[26] J.-Y. Girard. Light linear logic. *Information and Computation*, 143(2) :175–204, 1998.

[27] Jean-Yves Girard. Linear logic, its syntax and semantics. In Yves Lafont Jean-Yves Girard and Laurent Régnier, editors, *Advances in Linear Logic*. Cambridge University Press, 1995.

[28] S. Guerrini. Proof nets and the λ-calculus. In Paul Ruet T. Ehrhard, Jean-Yves Girard and Philip Scott, editors, *Linear Logic in Computer Science*, pages 65–118. Cambridge University Press, 2004.

[29] S. Hayashi. Adjunction of semifunctors : categorical structures in nonextensional lambda calculus. *Theoretical Computer Science*, 41 :95–104, 1985.

[30] R. Hoofman. The theory of semi-functors. *Mathematical Structures in Computer Science*, 3 :93–128, 1993.

[31] Paul Taylor et Yves Lafont Jean-Yves Girard. *Proofs and types*. Cambridge University Press, 1989.

[32] G. M. Kelly. *Basic Concepts of Enriched Category Theory*. Cambridge University Press, 1982.

[33] A. J. Kfoury. A linearization of the lambda-calculus and consequences. *Journal of Logic and Computation*, 10(3) :411–436, June 2000.

[34] J.-L. Krivine. A call-by-name lambda-calculus machine. To appear.

[35] J.-L. Krivine. *Lambda-calcul types et modèles*. Masson, 1990.

[36] D. Krob. Monoïdes et semi-anneaux complets. *Semigroup Forum*, 36 :323–339, 1987.

[37] Y. Lafont. Soft linear logic and polynomial time. *Theoretical Computer Science*, 318(1-2) :163–180, 2004.

[38] Yves Lafont. *Logiques, catégories et machines*. PhD thesis, Université Paris 7, 1988.

[39] J. Lambek and P. J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, 1986.

[40] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1998.

[41] Simone Martini. An interval model for second-order lambda calculus. In David H. Pitt, Axel Poigné, and David E. Rideheard, editors, *Category Theory and Computer Science*, volume 283 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 219–237. Springer, 1987.

[42] G. F. Mascari and Marco Pedicini. Head linear reduction and pure proof net extraction. *Theoretical Computer Science*, 135(1), 1994.

[43] Paul-André Melliès. Categorical models of linear logic revisited. *Theoretical Computer Science*, à paraître.

[44] Peter M. Neergaard and Harry G. Mairson. Types, potency, and idempotency : why nonlinearity and amnesia make a type system work. In *ICFP '04 : Proceedings of the ninth ACM SIGPLAN international conference on Functional programming*, pages 138–149. ACM Press, 2004.

[45] Michele Pagani. *Proof nets and cliques towards the understanding of analytical proofs*. PhD thesis, Università Roma Tre et Aix-Marseille II, 2006.

[46] Simona Ronchi Della Rocca. Principal type scheme and unification for intersection type discipline. *Theor. Comput. Sci.*, 59 :181–209, 1988.

[47] L. Roversi. A P-Time Completeness Proof for Light Logics. In *Ninth Annual Conference of the EACSL (CSL'99)*, volume 1683 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 469 – 483, Madrid (Spain), September 1999. Springer-Verlag.

[48] R. Seely. Linear logic, $*$-autonomous categories and cofree coalgebras. *Contemporary Mathematics*, 92, 1989.

[49] R. Street. The formal theory of monads. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2 :149–168, 1972.

[50] K. Terui. Light affine lambda calculus and polytime strong normalization. In *Proceedings of LICS'01*, pages 209–220, 2001.

[51] K. Terui. Light affine set theory : a naive set theory of polynomial time. *Studia Logica*, 77 :9–40, 2004.

[52] Lorenzo Tortora de Falco. *Réseaux, cohérence et expériences obsessionnelles*. PhD thesis, Université Paris 7, 2000.

Résumé. Cette thèse étudie les exponentielles de la logique linéaire sous différents aspects.

Des exponentielles hétérodoxes avec un travail sur une variante du lambda-calcul proposée par Terui (le lambda-calcul “light”) qui permet de représenter toutes les fonctions calculables en temps polynomial, et seulement elles. Ce calcul s’inspire du système LLL de Girard et contrôle le temps de calcul en décomposant la beta-réduction en étapes correspondant à des étapes de réduction de logique linéaire, au moyen d’un mécanisme de pattern-matching. Nous développons pour ce langage un système de types avec intersection garantissant l’absence de deadlocks durant la réduction.

Nous intéressant toujours aux types avec intersection, nous avons travaillé ensuite sur le lambda-calcul usuel, cherchant à établir des liens plus généraux entre temps de calcul et types. Dans ce but, nous avons considéré un système de types avec intersections non idempotentes, basé sur le modèle relationnel multiensembliste du lambda-calcul. Ce système est essentiellement identique à un système de types introduit en 1980 par Coppo, Dezani et Venneri, que nous situons ainsi dans son environnement naturel : une catégorie de co-Kleisli au-dessus de la catégorie des ensembles et des relations. Nous avons établi un lien étroit entre la taille des dérivations de types des termes dans ce système et leur temps d’exécution dans la machine de Krivine, un modèle d’évaluation des lambda-termes proche des machines à environnement utilisées en pratique pour l’évaluation des langages de programmation fonctionnels. Notre résultat peut être vu comme un raffinement quantitatif du théorème bien connu qui énonce qu’un lambda-terme est normalisable si et seulement si il est typable dans les types avec intersection.

Enfin, nous étudions la sémantique de la logique linéaire différentielle, un formalisme que Ehrhard a introduit il y a quelques années avec Régnier et dont il a récemment montré avec Laurent qu’il fournit un nouveau modèle du calcul concurrent et mobile. Nous avons considéré des modèles du fragment finitaire de cette logique (sans promotion) et montré comment on pouvait définir la promotion en utilisant une version catégorique de la formule de Taylor. Nous avons obtenu ainsi des semi-foncteurs pour interpréter les exponentielles de la logique linéaire et en avons étudié les propriétés, en fonction des propriétés algébriques (commutativité et cocommutativité) de l’interprétation finitaire sous-jacente. Nous avons obtenu de cette façon de nouveaux modèles, où les exponentielles (orthodoxes) ont des interprétations non standard, ainsi que des interprétations non invariantes par réduction, qui ont sûrement un grand intérêt pour l’étude de l’élimination des coupures.

Mots-clés : sémantique dénotationnelle ; lambda-calcul ; logique linéaire ; types avec intersection ; réseaux différentiels ; temps de calcul ; complexité implicite.